Sistemi Trifase

1 Sistemi trifase : definizioni e proprietà fondamentali *2*

2 Schema di alimentazione di un sistema trifase *5*

3 Utilizzatori trifase *7*

4 Vantaggi dei sistemi trifase *16*

5 Teorema di equivalenza *17*

1 Sistemi trifase : definizioni e proprietà fondamentali

Il trasporto e la distribuzione dell'energia elettrica dai luoghi di produzione (ossia dalle centrali) ai luoghi di utilizzazione avviene in massima parte per mezzo di linee elettriche a tre fili: *tali linee, i generatori che le alimentano e gli utilizzatori ad esse collegati formano, nel loro complesso, i cosiddetti* ***sistemi trifase.*** Nella figura 1 è mostrato lo schema di principio di una linea trifase che collega un complesso di generazione G ad un utilizzatore indicato con U:

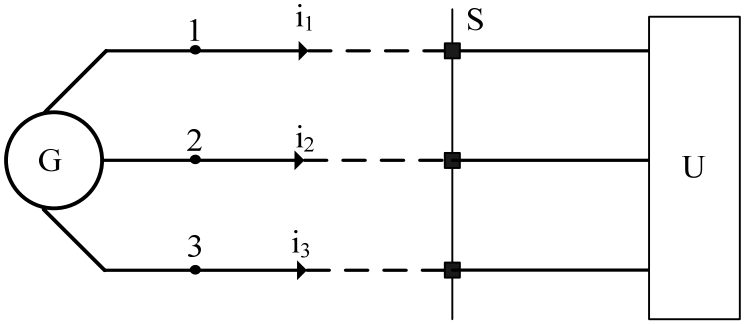

Fig. 1

Le correnti $i_1(t)$,$i_2(t)$ e $i_3(t)$ sono dette **correnti di linea** e sono tali da soddisfare, in un generico istante t, la seguente relazione ottenuta applicando la L.K.C. alla superficie gaussiana che circondi l'utilizzatore U:

$$i_1(t)+i_2(t)+i_3(t)=0 \qquad (1)$$

Se si considera, ora, una generica sezione S della linea intesa come intersezione fra un piano perpendicolare alla linea e la linea stessa, si può definire una terna di tensioni dette **tensioni concatenate** come:

$$\begin{cases} v_{12}(t) = v_1(t) - v_2(t) \\ v_{23}(t) = v_2(t) - v_3(t) \\ v_{31}(t) = v_3(t) - v_1(t) \end{cases} \qquad (2)$$

ossia, ciascuna tensione concatenata rappresenta la tensione fra due conduttori di linea in corrispondenza di una sezione considerata. Naturalmente variando la sezione in esame, la terna delle tensioni concatenate cambia e ciò a causa delle cadute di tensione sulla linea, tuttavia nel seguito, si supporrà di considerare nulle tali cadute di tensione in modo da poter ritenere costante la terna di tensioni concatenate su tutta la linea indipendentemente dalla sezione in esame.
Sommando membro a membro le relazioni (2) si ottiene:

$$v_{12}(t)+v_{23}(t)+v_{31}(t)=0 \qquad (3)$$

La (1) e la (3) sono equazioni nel tempo valide istante per istante, nelle quali compaiono grandezze sinusoidali isofrequenziali e come tali, ad esse si può applicare il procedimento di trasformazione del metodo simbolico (metodo dei fasori) giungendo così alle seguenti relazioni in termini fasoriali:

$$\begin{cases} \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0 \\ \overline{V}_{12} + \overline{V}_{23} + \overline{V}_{31} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Tale rappresentazione fasoriale è suscettibile della seguente interpretazione geometrica nel

piano complesso.

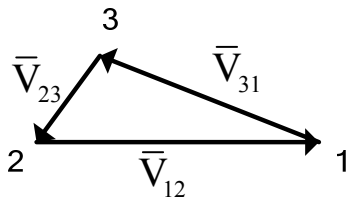

Fig. 2a

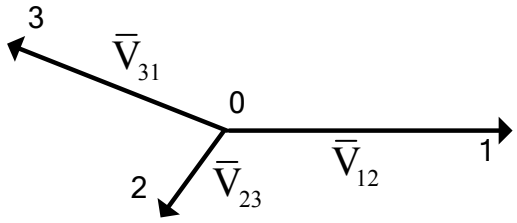

Fig. 2b

Facendo riferimento alla terna di tensioni concatenate, il fatto che la somma dei fasori a esse corrispondenti sia nulla comporta che i vettori rappresentativi di tali fasori, disegnati nel piano complesso, si dispongano a triangolo, come mostrato in fig. 2a. Si parla, allora, di *triangolo delle tensioni concatenate*. E' possibile anche, mantenendo fisso uno dei tre vettori e traslando parallelamente a se stessi gli altri due, ottenere la cosiddetta *stella delle tensioni concatenate* (che è mostrata in scala ridotta in fig. 2b). E' di particolare interesse il caso in cui i valori efficaci delle tre tensioni concatenate siano uguali fra loro, cioè:

$$V_{12} = V_{23} = V_{31} = V$$

Evidentemente, ne segue che il triangolo delle tensioni concatenate sarà un triangolo equilatero e, con riferimento alla rappresentazione a stella, si avrà che ciascun vettore sarà sfasato l'uno rispetto all'altro di 120°, come mostrato in figura:

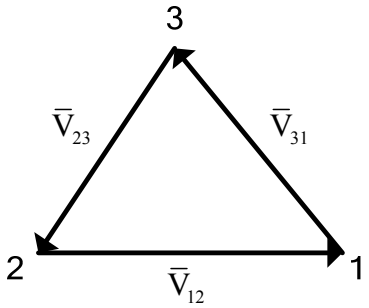

Fig. 3a

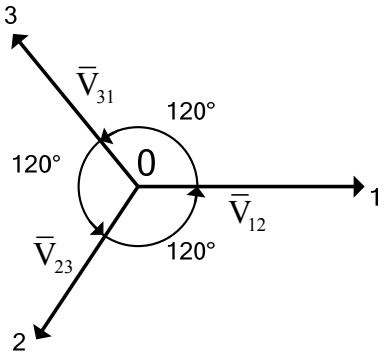

Fig. 3b

In questo caso, considerando $\overline{V}_{12}$ come riferimento, i tre vettori che compongono la terna delle tensioni concatenate è espressa dalle seguenti relazioni:

$$\overline{V}_{12} = V\angle 0° \qquad \overline{V}_{23} = V\angle -120° = V\angle 240° \qquad \overline{V}_{31} = V\angle 120° = V\angle -240°$$

spesso tale sequenza di tensioni è anche indicata come:

$$\overline{V}_{12}, \overline{V}_{23}, \overline{V}_{31} \quad \rightarrow \quad \overline{V}_{12}, \alpha^2\overline{V}_{12}, \alpha\overline{V}_{12} \qquad (*)$$

dove α è un operatore complesso che produce una rotazione di 120° se applicato a una generico fasore, ossia $\alpha = 1\angle 120°$.

Quando si verifica questa condizione, cioè quando i valori efficaci delle tensioni concatenate sono uguali fra loro, si dice che la terna di tensioni concatenate è **simmetrica**; nel caso appena

esaminato si dice anche che è una terna di tensioni concatenate **di sequenza diretta,** questo perché se si considera un qualsiasi vettore della terna nella stessa sequenza della relazione (*), tale vettore per sovrapporsi a quello che lo precede deve ruotare di 120° in senso positivo (cioè antiorario).
In modo del tutto analogo, si può definire una terna di tensioni concatenate **simmetrica di sequenza inversa** che dal punto di vista grafico è riportata nella figura 4:

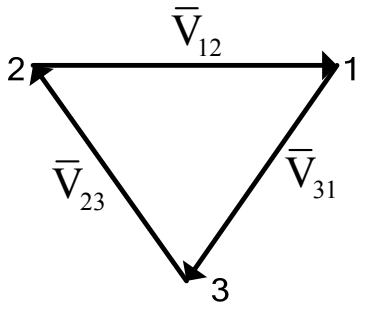

Fig. 4a

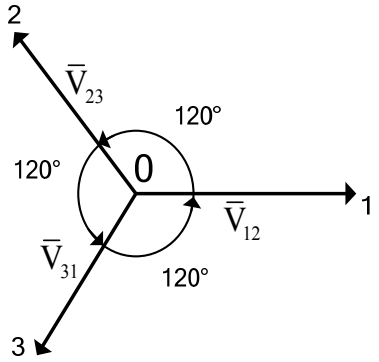

Fig. 4b

Si può scrivere allora:

$$\overline{V}_{12} = V\angle 0° \qquad \overline{V}_{23} = V\angle 120° = V\angle -240° \qquad \overline{V}_{31} = V\angle -120° = V\angle 240°$$

da cui segue che la terna di tensioni concatenate può essere scritta come:

$$\overline{V}_{12}, \overline{V}_{23}, \overline{V}_{31} \;\rightarrow\; \overline{V}_{12}, \alpha\overline{V}_{12}, \alpha^2\overline{V}_{12} \qquad (**)$$

Si osserva che, in questo caso, se si considera un qualsiasi vettore della terna nella stessa sequenza con cui è scritta nella relazione (**), tale vettore per sovrapporsi a quello che lo precede deve ruotare di 120° in senso negativo (cioè orario).

Le stesse considerazioni fatte per la terna di tensioni concatenate si possono anche estendere alla terna delle correnti di linea per cui si può parlare di *terna simmetrica delle correnti di linea in sequenza diretta* e *terna simmetrica delle correnti di linea in sequenza inversa*.
In particolare, detto I il valore efficace comune alle tre correnti ossia $I_1 = I_2 = I_3 = I$,
e scelta la corrente del primo conduttore $\overline{I}_1$ come riferimento per le correnti, si può scrivere:

$\overline{I}_1, \alpha^2\overline{I}_1, \alpha\overline{I}_1$ per una terna di sequenza diretta della correnti e
$\overline{I}_1, \alpha\overline{I}_1, \alpha^2\overline{I}_1$ per una terna di sequenza inversa della correnti.

Come fatto per le tensioni è possibile rappresentare nel piano complesso tali vettori sia secondo un triangolo sia secondo una stella, nelle figure 5 e 6 di seguito sono riportate tali rappresentazioni sia per la sequenza diretta sia per quella inversa.

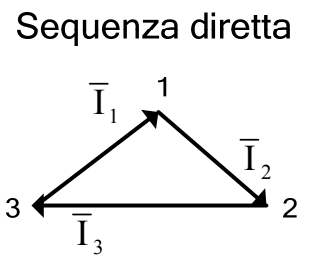

Fig. 5a

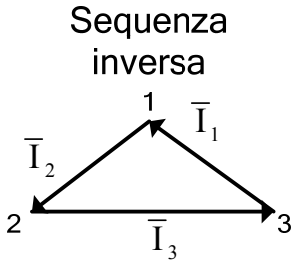

Fig. 5b

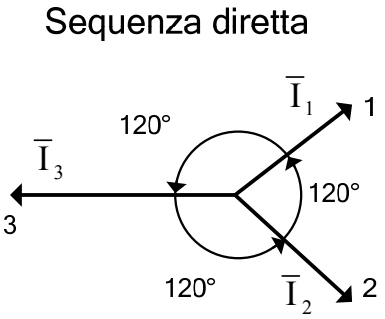

Fig. 6a

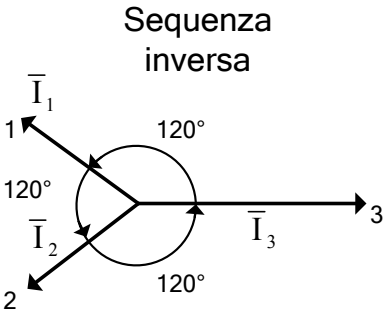

Fig. 6b

2 *Schema di alimentazione di un sistema trifase*

Da un punto di vista circuitale, il complesso di generazione G mostrato nello schema generale di un sistema trifase in fig. 1 può essere rappresentato, equivalentemente, da tre generatori monofase distinti le cui forme d'onda, sinusoidali ed isofrequenziali, hanno lo stesso valore efficace e sono sfasate l'una rispetto all'altra di 120°.
Si possono, quindi, avere due rappresentazioni equivalenti del complesso di generazione G, la prima in cui i tre generatori monofase sono disposti a stella, la seconda in cui i tre generatori sono disposti a triangolo. In ogni caso, i fasori associati alle forme d'onda di tali generatori formano una terna simmetrica in sequenza diretta. Si consideri per primo il caso in cui i tre generatori siano collegati 'a stella' come mostrato in figura:

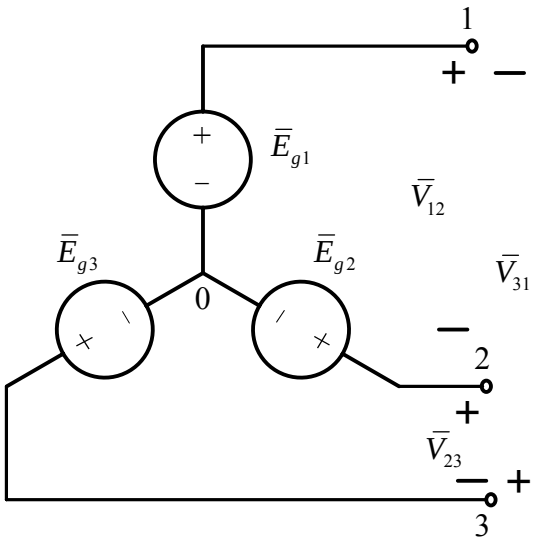

Fig. 7

Se si assume il fasore $\overline{E}_{g1}$ come riferimento le tensioni fornite dai 3 generatori sono date dalle seguenti espressioni:

$$\overline{E}_{g1} = E_g \angle 0° \quad \overline{E}_{g2} = \alpha^2 \overline{E}_{g1} \quad \overline{E}_{g3} = \alpha \overline{E}_{g1}$$

dove E_g è il valore efficace comune alle tre tensioni.

Se si applica la L.K.T. ai percorsi chiusi di nodi che comprendono le tre coppie di nodi 1-2, 2-3, 3-1 e il nodo 0 a cui sono collegati i generatori rispettivamente, si ottiene:

$$\begin{cases} \overline{v}_{12} = \overline{E}_{g1} - \overline{E}_{g2} = \overline{E}_{g1} - \alpha^2 \overline{E}_{g1} = (1-\alpha^2)\overline{E}_{g1} \\ \overline{v}_{23} = \overline{E}_{g2} - \overline{E}_{g3} = \alpha^2 \overline{E}_{g1} - \alpha \overline{E}_{g1} = (\alpha^2 - \alpha)\overline{E}_{g1} \\ \overline{v}_{31} = \overline{E}_{g3} - \overline{E}_{g1} = \alpha \overline{E}_{g1} - \overline{E}_{g1} = (\alpha - 1)\overline{E}_{g1} \end{cases}$$

Tenendo presente queste relazioni e tenendo conto del fatto che $\overline{E}_{g1}, \overline{E}_{g2}, \overline{E}_{g3}$ formano una terna simmetrica in sequenza diretta, è facile verificare che anche le tensioni concatenate formano una terna simmetrica in sequenza diretta: infatti, se si disegna il triangolo delle tensioni concatenate questo sarà sicuramente equilatero, come mostrato nella figura seguente:

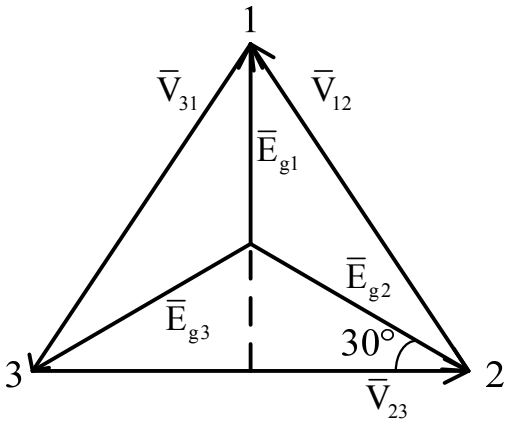

Fig. 8a

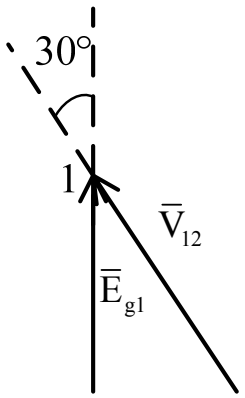

Fig. 8b

Dalla figura considerata è facile vedere che l'angolo compreso tra i fasori $\overline{E}_{g1}$ e $\overline{V}_{12}$ è un angolo di 30° . E' altrettanto facile notare che corrispondono ancora a 30° anche l'altro angolo al vertice 1 del triangolo (quello compreso tra i fasori $\overline{E}_{g1}$ e $\overline{V}_{31}$) ed entrambi gli angoli in cui sono divisi gli angoli ai vertici 2 e 3 del triangolo.
A questo punto se si assume $V_{12} = V_{23} = V_{31} = V$ e $E_{g1} = E_{g2} = E_{g3} = E_g$, diventa immediato calcolare il modulo dei fasori delle tensioni concatenate, esso è dato da:

$$V = 2E_g \cos 30° \Leftrightarrow \frac{V}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_g \Leftrightarrow V = \sqrt{3} E_g \qquad (5)$$

In precedenza si è già osservato che le tensioni concatenate sono sfasate rispetto a quelle dei generatori di 30°, in particolare esse risultano in anticipo di 30° sulle tensioni dei tre generatori e, quindi scegliendo $\overline{E}_{g1}$ come fasore di riferimento, cioè ponendo: $\overline{E}_{g1} = E_g \angle 0°$ le tensioni concatenate possono essere espresse come segue:

$$\overline{V}_{12} = V\angle 30° = \sqrt{3}E_g\angle 30°$$
$$\overline{V}_{23} = \alpha^2\overline{V}_{12} = \sqrt{3}E_g\angle 270° \qquad (6)$$
$$\overline{V}_{31} = \alpha\overline{V}_{12} = \sqrt{3}E_g\angle 150°$$

E' sufficiente, perciò conoscere il valore di E_g per determinare la terna delle tensioni concatenate.

Si consideri ora il caso in cui i tre generatori monofase distinti siano collegati a triangolo come mostrato in figura:

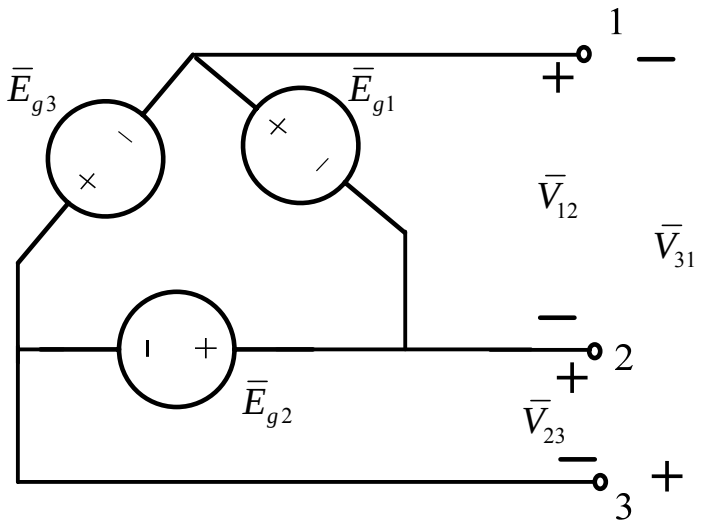

Fig. 9

Evidentemente, si può scrivere:

$$\overline{V}_{12} = \overline{E}_{g1} \quad \overline{V}_{23} = \overline{E}_{g2} \quad \overline{V}_{31} = \overline{E}_{g3}$$

da cui si deduce, ricordando che $\overline{E}_{g1}, \overline{E}_{g2}, \overline{E}_{g3}$ formano una terna simmetrica in sequenza diretta, che anche le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica in sequenza diretta.

In entrambi i casi considerati, quindi, si è visto come ad una terna simmetrica di tensioni del generatore trifase corrisponda (a meno delle cadute interne) una terna simmetrica di tensioni concatenate ai morsetti del generatore stesso e, quindi (a meno delle cadute sulla linea), una terna simmetrica di tensioni concatenate in qualsiasi altra sezione di linea. Si conclude che la simmetria e la sequenza delle tensioni concatenate dipende essenzialmente dalla simmetria e dalla sequenza delle forme d'onda del generatore trifase (essendo di solito modesta l'influenza delle cadute di tensione) e, poiché quest'ultima è di norma realizzata, d'ora in poi si considererà l'ipotesi che i sistemi trifase siano alimentati, salvo precisazione contraria, con tensioni concatenate simmetriche di sequenza diretta.

3 *Utilizzatori trifase*

Gli utilizzatori o *'carichi'* di una linea trifase possono essere costituiti da porzioni di circuito comunque complesse; in relazione a ciò il calcolo delle correnti relative ad essi si può effettuare, note che siano le tensioni concatenate di alimentazione, con i metodi generali inerenti

allo studio dei circuiti in regime sinusoidale. E', tuttavia, opportuno soffermarsi su due particolari utilizzatori di uso frequente, costituiti entrambi da tre impedenze.

Triangolo di impedenze. Il primo di essi è rappresentato in figura 10 e corrisponde al cosiddetto *triangolo di impedenze*:

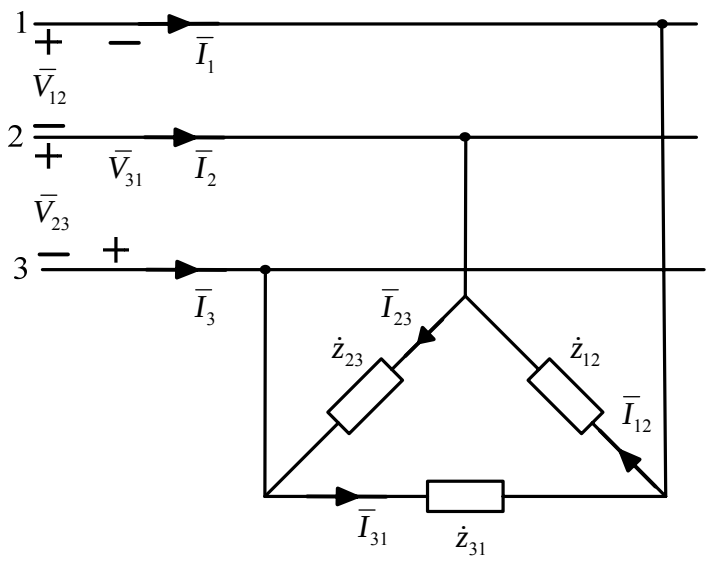

Fig. 10

Il calcolo delle correnti nelle 3 impedenze che rappresentano il carico della linea trifase, si può effettuare come di seguito supponendo note la terna di tensioni concatenate (simmetrica ed in sequenza diretta) che alimenta il carico e le impedenze del triangolo:

$$\overline{V}_{12} = V\angle 0^o \text{ (riferimento)}, \ \overline{V}_{23} = V\angle -120^o, \ \overline{V}_{31} = V\angle -240^o$$

$$\dot{z}_{12} = z_{12}\angle\varphi_1 \qquad \dot{z}_{23} = z_{23}\angle\varphi_2 \qquad \dot{z}_{31} = z_{31}\angle\varphi_3$$

Evidentemente risulta:

$$\begin{cases} \overline{I}_{12} = \dfrac{\overline{V}_{12}}{\dot{z}_{12}} = \dfrac{V}{z_{12}}\angle -\varphi_1 \\ \overline{I}_{23} = \dfrac{\overline{V}_{23}}{\dot{z}_{23}} = \dfrac{V}{z_{23}}\angle -120^o - \varphi_2 \\ \overline{I}_{31} = \dfrac{\overline{V}_{31}}{\dot{z}_{31}} = \dfrac{V}{z_{31}}\angle -240^o - \varphi_3 \end{cases} \qquad (7)$$

Note le correnti interne al triangolo, quelle assorbite dalla linea si determinano facilmente facendo ricorso alla L.K.C. applicata ai nodi del triangolo:

$$\begin{cases} \overline{I}_1 = \overline{I}_{12} - \overline{I}_{31} \\ \overline{I}_2 = \overline{I}_{23} - \overline{I}_{12} \\ \overline{I}_3 = \overline{I}_{31} - \overline{I}_{23} \end{cases} \qquad (8)$$

Si noti che mentre: $\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$ questo, in generale, non è vero per le correnti nei lati del triangolo.

E' di particolare interesse il caso in cui le impedenze che costituiscono il triangolo siano tra loro uguali, in questo caso si ha:

$$\dot{z}_{12} = \dot{z}_{23} = \dot{z}_{31} = \dot{z} = z\angle\varphi$$

A tal caso ci si riferisce come al caso di carico **equilibrato.** In particolare, ricordando che le tensioni concatenate formano una terna simmetrica in sequenza diretta, si deduce, dalle relazioni (7), che anche le correnti interne al triangolo formano una terna simmetrica in sequenza diretta il cui valore efficace è pari a:

$$I_\Delta = I_{12} = I_{23} = I_{31} = \frac{V}{z} \qquad (9)$$

In figura è indicata, nel piano complesso, la terna delle correnti interne al triangolo, dove per comodità si è supposto φ>0.

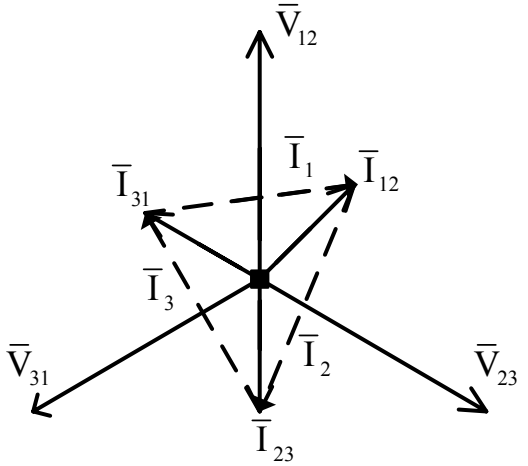

Fig. 11a

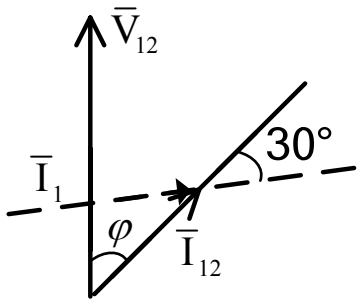

Fig. 11b

Dalla figura 11b è facile vedere che l'angolo compreso tra i fasori $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_{12}$ è un angolo di 30° (dal punto di vista geometrico si ha la stessa costruzione già incontrata per le tensioni concatenate e quelle dei generatori monofase). E' altrettanto facile notare che la stessa cosa accade per gli angoli tra i fasori $\overline{I}_2$ e $\overline{I}_{23}$ e $\overline{I}_3$ e $\overline{I}_{31}$.

A questo punto se si assume $I_1 = I_2 = I_3 = I$ il modulo dei fasori delle correnti di linea è dato da:

$$\frac{I}{2} = I_\Delta \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} I_\Delta$$

ossia da:

$$I = \sqrt{3} I_\Delta = \sqrt{3}\frac{V}{z} \qquad (10)$$

Dalla figura 11a si nota che le correnti interne al triangolo sono sfasate di φ° in ritardo (avendo supposto φ> 0) rispetto alle tensioni concatenate mentre le correnti di linea sono sfasate di 30° in ritardo rispetto alle correnti interne al triangolo delle impedenze.

A seguito di questa osservazione se si sceglie la tensione $\overline{V}_{12}$ come riferimento si ha:

$\overline{V}_{12} = V\angle 0°$
e di conseguenza le correnti di linea sono date da:

$$\overline{I}_1 = \sqrt{3} I_\Delta \angle(-\varphi - 30°) = \sqrt{3}\frac{V}{z}\angle(-\varphi - 30°), \quad \overline{I}_2 = \alpha^2 \overline{I}_1 \quad \overline{I}_3 = \alpha \overline{I}_1 \qquad (11)$$

Calcolo delle potenze
Per quanto riguarda la valutazione energetica, la potenza complessa assorbita dal carico nel caso generale in cui esso sia squilibrato, cioè le impedenze che costituiscono il triangolo non sono tutte uguali fra loro, può essere ricavata come somma delle potenze complesse assorbite da ciascuna impedenza del triangolo:

$$\overline{\mathrm{N}} = \overline{\mathrm{N}}_{12} + \overline{\mathrm{N}}_{23} + \overline{\mathrm{N}}_{31} = \overline{\mathrm{V}}_{12}\overline{\mathrm{I}}_{12}^* + \overline{\mathrm{V}}_{23}\overline{\mathrm{I}}_{23}^* + \overline{\mathrm{V}}_{31}\overline{\mathrm{I}}_{31}^*$$

Supponendo di assumere come riferimento: $\overline{V}_{12} = V\angle 0°$

$$\overline{\mathrm{N}} = \mathrm{V}\angle 0° \mathrm{I}_{12}\angle\varphi_1 + \mathrm{V}\angle(-120°)\mathrm{I}_{23}\angle(120° + \varphi_2) + \mathrm{V}\angle(-240°)\mathrm{I}_{31}\angle(240° + \varphi_3)$$

da cui segue immediatamente che:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{N}} &= \mathrm{VI}_{12}\angle\varphi_1 + \mathrm{VI}_{23}\angle\varphi_2 + \mathrm{VI}_{31}\angle\varphi_3 \\ \mathrm{P} &= \mathrm{VI}_{12}\cos\varphi_1 + \mathrm{VI}_{23}\cos\varphi_2 + \mathrm{VI}_{31}\cos\varphi_3 \\ \mathrm{Q} &= \mathrm{VI}_{12}\mathrm{sen}\varphi_1 + \mathrm{VI}_{23}\mathrm{sen}\varphi_2 + \mathrm{VI}_{31}\mathrm{sen}\varphi_3 \end{aligned} \qquad (12)$$

Nel caso particolare in cui il carico sia **equilibrato** si ha:

$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$ e $\mathrm{I}_{12} = \mathrm{I}_{23} = \mathrm{I}_{31} = \mathrm{I}_\Delta$

da cui è immediato ricavare che la potenza attiva e reattiva hanno le seguenti espressioni:

$\mathrm{P} = 3\mathrm{VI}_\Delta\cos\varphi$ e $\mathrm{Q} = 3\mathrm{VI}_\Delta\mathrm{sen}\varphi$
considerando i valori dei moduli delle correnti del triangolo.

Se invece si considerano direttamente i valori delle correnti di linea si ha:

$\mathrm{P} = \sqrt{3}\mathrm{VI}\cos\varphi$ e $\mathrm{Q} = \sqrt{3}\mathrm{VI}\mathrm{sen}\varphi$

ricordando che la relazione tra i moduli delle correnti di linea e quelli delle correnti del triangolo è data da: $\mathrm{I}_\Delta = \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{3}}$

(Nota: si tenga presente che φ è sempre l'angolo di sfasamento tra la terna delle tensioni concatenate e quella delle correnti interne al triangolo delle impedenze; in altri termini, φ è l'argomento comune delle tre impedenze che formano il triangolo in esame).

Stella di impedenze. Lo schema dell'utilizzatore modellato come 3 impedenze collegate a stella è mostrato nella figura 12.

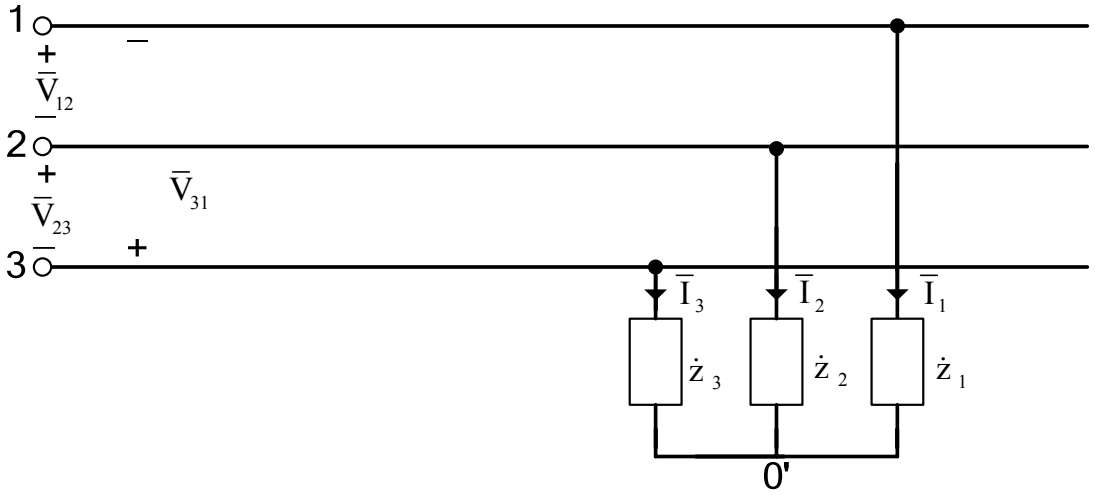

Fig. 12

Se si vuole valutare in modo semplice questo schema, si può considerare la figura seguente e fare riferimento alle tensioni dei generatori piuttosto che a quelle concatenate.

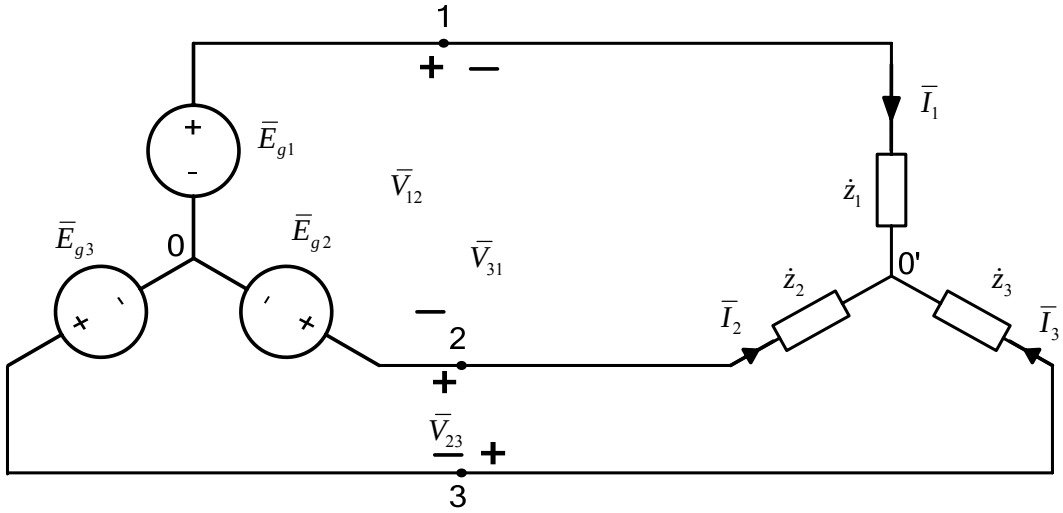

Fig. 13

In particolare lo studio può essere condotto partendo dal caso di un sistema trifase con neutro anche detto sistema a quattro fili. In questo caso il circuito in esame è quello riportato in basso, mentre il ruolo del collegamento aggiuntivo che prende il nome di neutro sarà più chiaro nel seguito della trattazione.

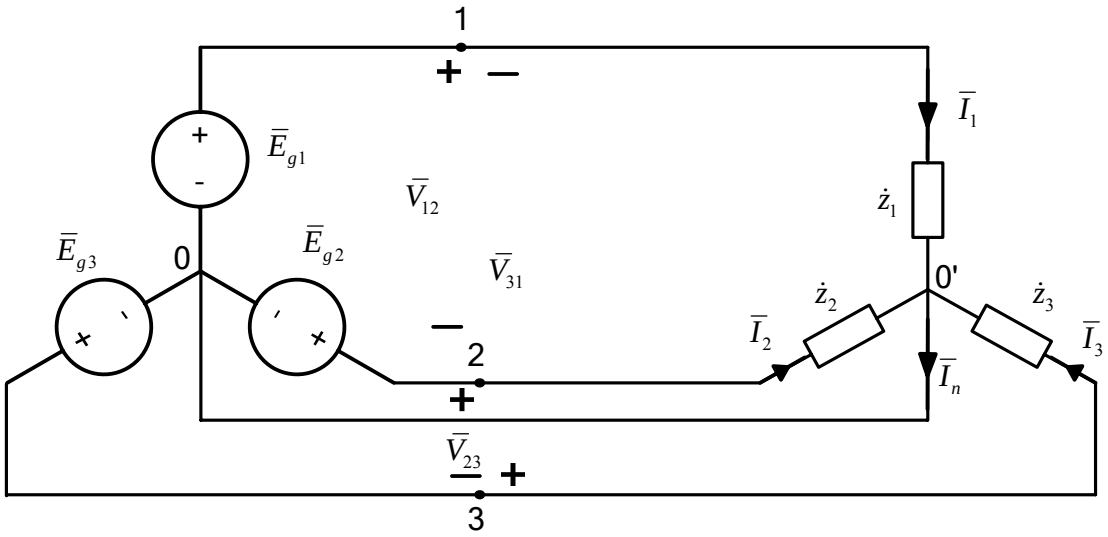

Fig. 14

Nel caso in esame è immediato verificare come le correnti di linea siano coincidenti con le correnti nei carichi. Pertanto per conoscere queste correnti è possibile utilizzare semplicemente le seguenti formule:

$$\begin{cases} \overline{I}_1 = \dfrac{\overline{E}_{g1}}{\dot{z}_1} \\ \overline{I}_2 = \dfrac{\overline{E}_{g2}}{\dot{z}_2} \\ \overline{I}_3 = \dfrac{\overline{E}_{g3}}{\dot{z}_3} \end{cases}$$

Infatti, il collegamento dovuto al neutro impone che ciascuna delle tensioni del generatore trifase sia proprio ai capi di ciascuna delle impedenze che costituiscono il carico.

Infine, il valore della corrente nel neutro è immediatamente ottenuta dalla LKC ad una generica gaussiana che taglia i quattro conduttori:

$$\overline{I}_n = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3$$

Mentre la potenza assorbita da tale carico può essere ottenuta semplicemente sommando le potenze assorbite da ciascuna delle impedenze che lo compongono.
In definitiva si ha:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \mathrm{Re}\left[\dot{z}_1\right] I_1^2 + \mathrm{Re}\left[\dot{z}_2\right] I_2^2 + \mathrm{Re}\left[\dot{z}_3\right] I_3^2$$

e allo stesso modo si può calcolare la potenza reattiva del carico.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \mathrm{Im}\left[\dot{z}_1\right] I_1^2 + \mathrm{Im}\left[\dot{z}_2\right] I_2^2 + \mathrm{Im}\left[\dot{z}_3\right] I_3^2$$

Un caso particolarmente interessante è quello di **carico equilibrato**. In questo caso si ha:
$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = \dot{z} = z\angle\varphi°$

per cui, ricordando che le relazioni delle tre tensioni dei generatori sono date da:

$$\overline{E}_{g1} = E_g\angle 0° \quad \overline{E}_{g2} = \alpha^2\overline{E}_{g1} \quad \overline{E}_{g3} = \alpha\overline{E}_{g1} \quad \text{ossia:}$$

$$\overline{E}_{g1} = E_g\angle 0° \quad \overline{E}_{g2} = E_g\angle -120° = E_g\angle 240° \quad \overline{E}_{g3} = E_g\angle 120° = E_g\angle -240°$$

dalle equazioni che descrivono le correnti si ha:

$$\begin{cases} \overline{I}_1 = \dfrac{\overline{E}_{g1}}{\dot{z}_1} = \dfrac{E_g\angle 0°}{z\angle\varphi°} = \dfrac{E_g}{z}\angle -\varphi° \\ \overline{I}_2 = \dfrac{\overline{E}_{g2}}{\dot{z}_2} = \dfrac{E_g\angle -120°}{z\angle\varphi°} = \dfrac{E_g}{z}\angle -120° - \varphi° \\ \overline{I}_3 = \dfrac{\overline{E}_{g3}}{\dot{z}_3} = \dfrac{E_g\angle -240°}{z\angle\varphi°} = \dfrac{E_g}{z}\angle -240° - \varphi° \end{cases}$$

E' immediato quindi riscontrare che le tre correnti costituiscono una terza simmetrica di sequenza diretta. Utilizzando queste relazioni per il calcolo della corrente del neutro si ha:

$$\overline{I}_n = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = \frac{\overline{E}_{g1}}{\dot{z}_1} + \frac{\overline{E}_{g2}}{\dot{z}_2} + \frac{\overline{E}_{g3}}{\dot{z}_3} = \frac{1}{\dot{z}}\left(\overline{E}_{g1} + \overline{E}_{g2} + \overline{E}_{g3}\right) = 0$$

infatti, la somma delle tensioni dei generatori è una terna simmetrica di sequenza diretta. Pertanto il neutro consente in generale la chiusura delle correnti di linea, ma è attraversato da una corrente nulla nel caso si abbia un carico equilibrato.

Dal punto di vista energetico si possono usare ancora le relazioni considerate in precedenza, che risultano però semplificate:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \mathrm{Re}\left[\dot{z}_1\right]I_1^2 + \mathrm{Re}\left[\dot{z}_2\right]I_2^2 + \mathrm{Re}\left[\dot{z}_3\right]I_3^2 = 3\mathrm{Re}\left[\dot{z}\right]I^2 = 3\mathrm{Re}\left[\dot{z}\right]\frac{E_g^2}{z^2}$$

e allo stesso modo si può calcolare la potenza reattiva del carico.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \mathrm{Im}\left[\dot{z}_1\right]I_1^2 + \mathrm{Im}\left[\dot{z}_2\right]I_2^2 + \mathrm{Im}\left[\dot{z}_3\right]I_3^2 = 3\,\mathrm{Im}\left[\dot{z}\right]I^2 = 3\,\mathrm{Im}\left[\dot{z}\right]\frac{E_g^2}{z^2}$$

Se poi si fa riferimento direttamente alla potenza complessa si ha:

$$\overline{N} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{N}_3 = \overline{E}_{g1}\overline{I}_1^* + \overline{E}_{g2}\overline{I}_2^* + \overline{E}_{g3}\overline{I}_3^* =$$

$$= E_g\angle 0°\frac{E_g}{z}\angle +\varphi° + E_g\angle -120°\frac{E_g}{z}\angle +120° + \varphi° + E_g\angle -240°\frac{E_g}{z}\angle +240° + \varphi° =$$

$$= \frac{E_g^2}{z}\angle\varphi° + \frac{E_g^2}{z}\angle\varphi° + \frac{E_g^2}{z}\angle\varphi° = 3\frac{E_g^2}{z}\angle\varphi°$$

da cui si ottiene che:

$$P = 3\frac{E_g^2}{z}\cos(\varphi) \quad \text{e} \quad Q = 3\frac{E_g^2}{z}\sin(\varphi)$$

Se poi si vuole esprimere questa potenza in funzione delle tensioni concatenate è sufficiente ricordare la relazione esistente tra le tensioni dei generatori e quelle concatenate, già date nella (6) e qui riportate per comodità:

$$\overline{V}_{12} = V\angle 30° = \sqrt{3}E_g\angle 30°$$
$$\overline{V}_{23} = \alpha^2\overline{V}_{12} = \sqrt{3}E_g\angle 270°$$
$$\overline{V}_{31} = \alpha\overline{V}_{12} = \sqrt{3}E_g\angle 150°$$

da cui si ha:

$$P = 3\frac{E_g^2}{z}\cos\varphi = 3\frac{\left(V/\sqrt{3}\right)^2}{z}\cos\varphi = \frac{V^2}{z}\cos\varphi$$
$$Q = 3\frac{E_g^2}{z}\sin(\varphi) = 3\frac{\left(V/\sqrt{3}\right)^2}{z}\sin\varphi = \frac{V^2}{z}\sin\varphi$$

In modo del tutto analogo è possibile vedere che se si considerano direttamente i moduli delle correnti come $I_1=I_2=I_3=I$, allora si ottiene:

$$\overline{N} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{N}_3 = \overline{E}_{g1}\overline{I}_1^* + \overline{E}_{g2}\overline{I}_2^* + \overline{E}_{g3}\overline{I}_3^* =$$
$$= E_g\angle 0° I\angle +\varphi° + E_g\angle -120° I\angle +120° + \varphi° + E_g\angle -240° I\angle +240° + \varphi° =$$
$$= E_g I\angle\varphi° + E_g I\angle\varphi° + E_g I\angle\varphi° = 3E_g I\angle\varphi°$$

e considerando ancora una volta la relazione tra il modulo di E_g e quello delle tensioni concatenate si ha:
$\overline{N} = \sqrt{3}VI\angle\varphi°$.

Nel caso in cui non è presente il neutro, i punti 0 e 0' non sono più allo stesso potenziale e le singole impedenze del carico sono sottoposte a tensioni che vengono dette tensioni di fase e definite tra i nodi 1, 2 e 3 e il nodo 0' rispettivamente. Tali tensioni non sono più coincidenti con le tensioni dei generatori e devono essere calcolate considerando la differenza di tensione esistente tra il punto 0' e il punto 0 assunto come riferimento. Assumendo questa tensione indicata dalla variabile $\overline{E}_{0'}$ è facile verificare che le tensioni di fase a cui sono sottoposte le impedenze di carico sono date da:

$$\begin{cases} \overline{E}_1 = \overline{E}_{g1} - \overline{E}_{0'} \\ \overline{E}_2 = \overline{E}_{g2} - \overline{E}_{0'} \\ \overline{E}_3 = \overline{E}_{g3} - \overline{E}_{0'} \end{cases}$$

mentre le tre correnti di linea sono date da:

$$\begin{cases} \overline{I}_1 = \dfrac{\overline{E}_1}{\dot{z}_1} \\ \overline{I}_2 = \dfrac{\overline{E}_2}{\dot{z}_2} \\ \overline{I}_3 = \dfrac{\overline{E}_3}{\dot{z}_3} \end{cases}$$

Se si considerano le espressioni precedenti e il fatto che la somma delle tre correnti di linea deve

essere nulla si ha:

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = \frac{\overline{E}_1}{\dot{z}_1} + \frac{\overline{E}_2}{\dot{z}_2} + \frac{\overline{E}_3}{\dot{z}_3} = \frac{\overline{E}_{g1} - \overline{E}_{0'}}{\dot{z}_1} + \frac{\overline{E}_{g2} - \overline{E}_{0'}}{\dot{z}_2} + \frac{\overline{E}_{g3} - \overline{E}_{0'}}{\dot{z}_3} = 0$$

da cui si ha:

$$\dot{y}_1\left(\overline{E}_{g1} - \overline{E}_{0'}\right) + \dot{y}_2\left(\overline{E}_{g2} - \overline{E}_{0'}\right) + \dot{y}_3\left(\overline{E}_{g3} - \overline{E}_{0'}\right) = 0$$

$$\dot{y}_1\overline{E}_{g1} + \dot{y}_2\overline{E}_{g2} + \dot{y}_3\overline{E}_{g3} = \overline{E}_{0'}\left(\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3\right)$$

$$\overline{E}_{0'} = \frac{\dot{y}_1\overline{E}_{g1} + \dot{y}_2\overline{E}_{g2} + \dot{y}_3\overline{E}_{g3}}{\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3}$$

Nota questa tensione è possibile utilizzare le precedenti formule per valutare tutte le correnti e quindi le potenze relative al carico considerato.

Un caso di particolare interesse è, ancora una volta, quello in cui tutte le impedenze del carico risultano essere uguali, ossia il caso di **carico equilibrato**.
In questa situazione si nota che la precedente relazione può essere messa nella forma:

$$\overline{E}_{0'} = \frac{\dot{y}\left(\overline{E}_{g1} + \overline{E}_{g2} + \overline{E}_{g3}\right)}{3\dot{y}} = 0$$

infatti, le tre tensioni dei generatori sono una terna simmetrica.
Questo vuol dire che nel caso specifico di carico equilibrato non c'è alcuna caduta di tensione tra i punti 0' e 0 ed il sistema nel suo complesso si comporta esattamente come un sistema a quattro fili, il che chiaramente semplifica notevolmente l'analisi di questi sistemi.

In modo particolare è possibile notare che in un circuito trifase equilibrato di questo tipo l'informazione da ricavare è quella relativa alla corrente di linea $\overline{I}_1$, nota questa è poi possibile ricavare tutte le altre correnti di linea immediatamente. Poiché questa corrente può essere ricavata dalla relazione $\overline{I}_1 = \frac{\overline{E}_1}{\dot{z}_1} = \frac{\overline{E}_{g1}}{\dot{z}_1}$ è facile comprendere come per studiare un sistema del tipo appena analizzato sia sufficiente fare riferimento al seguente circuito equivalente monofase.

Fig. 15

Infatti i nodi 0 e 0' è stato già detto che si trovano allo stesso potenziale. Questa semplificazione risulta di particolare interesse quando si considerano sulla linea le impedenze che ne descrivono il comportamento in termini di caduta di tensione e potenza assorbita dalla stessa. A questo caso fa riferimento il circuito descritto di seguito nel quale si suppongono verificate le condizioni:

$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = \dot{z} = z\angle\varphi°$ e $\dot{z}_{L1} = \dot{z}_{L2} = \dot{z}_{L3} = \dot{z}_L = z_L\angle\varphi_L°$

ossia che il carico sia equilibrato e che le impedenze delle tre linee siano tutte uguali.

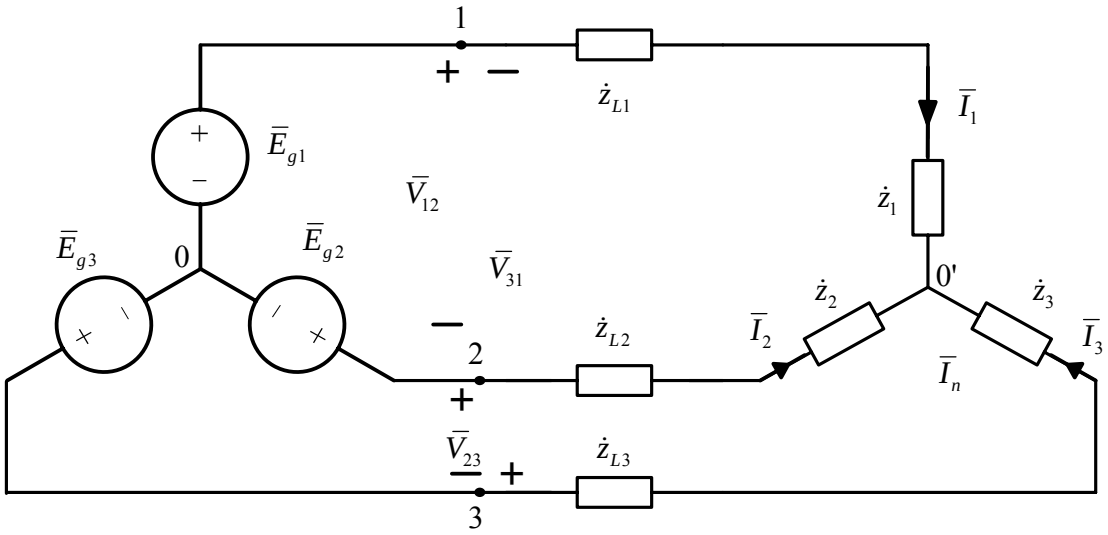

Fig. 16

In questo caso il circuito equivalente monofase è quello riportato in basso e si nota come possa essere semplice ed immediato valutare le cadute di tensione sulla linea nonché la potenza assorbita dalla singola linea o dalla singola impedenza di carico.

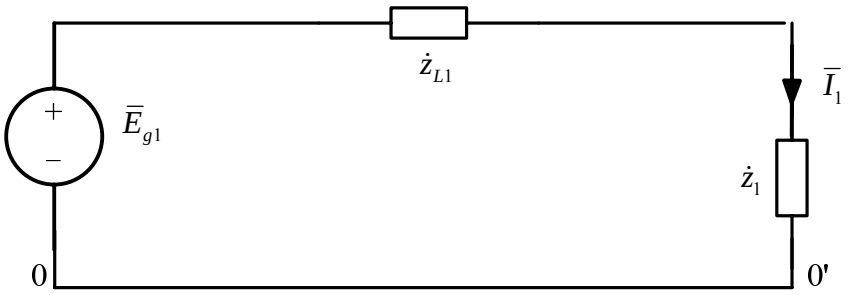

Fig. 17

4 Vantaggi dei sistemi trifase

L'utilizzo dei sistemi trifase per la trasmissione dell'energia elettrica è legato ad alcune considerazioni che li rendono preferibili ai sistemi sinusoidali di tipo monofase.
Il primo risiede nel fatto che i motori elettrici che producono potenze anche sino a MW, i cosiddetti motori asincroni, sono funzionalmente legati a una alimentazione trifase. Inoltre, i motori trifase si avviano più facilmente dei motori monofase.
Il secondo vantaggio è legato al risparmio di energia dissipata sulle linee di trasmissione. Si è visto che considerato un generico carico equilibrato in un sistema di alimentazione trifase questo assorbe una potenza attiva pari a $P_T = \sqrt{3}V_T I_T \cos\varphi$, essendo V_T il modulo delle tensioni concatenate e I_T il modulo delle correnti di fase, mentre il pedice T indica il riferimento a grandezze del sistema trifase. Se, invece, si suppone di avere uno stesso carico sottoposto ad una alimentazione monofase la potenza attiva è data da $P_M = V_M I_M \cos\varphi$ dove il pedice M indica

il riferimento a grandezze del sistema monofase. Ora, poiché il carico è lo stesso esso deve funzionare sempre allo stesso modo, quindi deve assorbire la stessa potenza. Pertanto, uguagliando le due potenze e supponendo che la tensione concatenata sia proprio la tensione dell'alimentazione monofase si ha che tra le correnti dei due casi considerati si ha la seguente relazione: $I_M = \sqrt{3} I_T$. Questo implica che il sistema di alimentazione monofase è attraversato da una corrente $\sqrt{3}$ volte più grande di quello trifase.

L'ultimo vantaggio è costituito dal fatto che in un sistema bilanciato, ossia con carico equilibrato, la potenza sul carico è indipendente dal tempo.

Questo si può facilmente dimostrare considerando le espressioni nel tempo delle tensioni concatenate e delle correnti di fase, utili per calcolare la potenza istantanea assorbita da un sistema trifase. Le tensioni sono date da:

$$v_{12}(t) = V\cos\omega t\,, \qquad v_{12}(t) = V\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \qquad v_{12}(t) = V\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

mentre le correnti sono date da:

$$i_1(t) = I\cos\left(\omega t - \varphi\right), \qquad i_2(t) = I\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right), \qquad i_3(t) = I\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right)$$

dove φ rappresenta lo sfasamento introdotto dalle impedenze di carico tutte uguali.

Allora la potenza nel tempo è data da:

$$p(t) = \frac{v_{12}}{\sqrt{3}} i_1 + \frac{v_{23}}{\sqrt{3}} i_2 + \frac{v_{31}}{\sqrt{3}} i_3 =$$

$$= \frac{VI}{\sqrt{3}}[\cos\omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi) + \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \cdot \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi)]$$

ricordando che : $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$

si ha:

$$p(t) = \frac{VI}{2\sqrt{3}}[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi + \cos(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi) + \cos\varphi + \cos(2\omega t - \frac{8\pi}{3} - \varphi)] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} VI\cos\varphi + \frac{VI}{2\sqrt{3}}[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi) + \cos(2\omega t - \frac{8\pi}{3} - \varphi)] = \frac{\sqrt{3}}{2} VI\cos\varphi$$

infatti il termine nella parentesi quadra può essere sviluppato come segue.

$$\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi) + \cos(2\omega t - \frac{8\pi}{3} - \varphi) =$$

$$= \cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - \varphi)\cos(-\frac{4\pi}{3}) - \sin(2\omega t - \varphi)\sin(-\frac{4\pi}{3}) + \cos(2\omega t - \varphi)\cos(-\frac{8\pi}{3}) - \sin(2\omega t - \varphi)\sin(-\frac{8\pi}{3}) =$$

$$= \cos(2\omega t - \varphi) - \frac{1}{2}\cos(2\omega t - \varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\omega t - \varphi) - \frac{1}{2}\cos(2\omega t - \varphi) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\omega t - \varphi) = 0$$

In definitiva, si può affermare che la potenza istantanea di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato è costante.

5 *Teorema di equivalenza*

Sia assegnato un utilizzatore U qualsiasi (vedi fig. 18a) tale che, alimentato da una data terna di tensioni concatenate $\overline{V}_{12}, \overline{V}_{23}, \overline{V}_{31}$, assorba dalla linea le correnti $\overline{I}_1, \overline{I}_2, \overline{I}_3$.

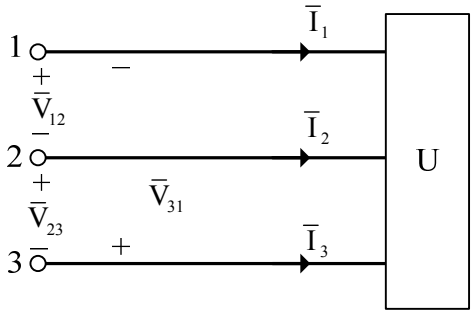

Fig. 18a

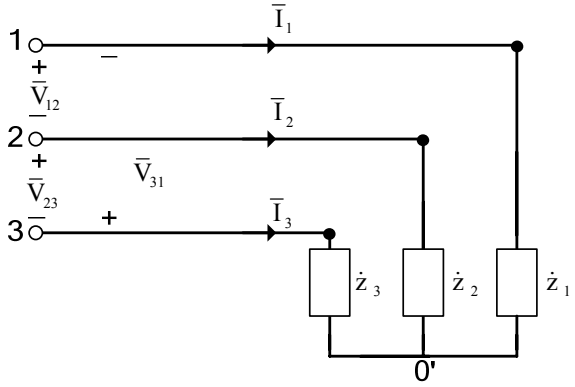

Fig. 18b

Una stella di impedenze si dirà **equivalente** *all'utilizzatore U nella condizione di funzionamento assegnata* quando, alimentata con lo stesso sistema di tensioni concatenate del carico U, richiami dalla linea le medesime correnti del carico stesso. Si noti che l'equivalenza dipende dalla situazione di funzionamento considerata (caratterizzata dalle tensioni concatenate e dalle correnti di linea) cosicché una stella che sia equivalente ad U per un dato funzionamento, in genere non lo è più al variare di esso. Per definizione, le impedenze di una stella equivalente devono, quindi, soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \overline{V}_{12} = \dot{z}_1 \overline{I}_1 - \dot{z}_2 \overline{I}_2 \\ \overline{V}_{23} = \dot{z}_2 \overline{I}_2 - \dot{z}_3 \overline{I}_3 \\ \overline{V}_{31} = \dot{z}_3 \overline{I}_3 - \dot{z}_1 \overline{I}_1 \end{cases}$$

D'altra parte l'ultima equazione di tale sistema si ottiene come combinazione delle prime due e, quindi, non va considerata. Essendo le incognite in numero superiore alle equazioni, il sistema ammette infinite soluzioni, una generica delle quali può essere ricavata fissando arbitrariamente un'incognita, ad esempio $\dot{z}_1$, e ricavando le altre due in funzione di essa. Si osservi che, essendo l'incognita che si sceglie arbitraria nel modulo e nell'argomento, vi sono due gradi di libertà nella scelta iniziale e pertanto le stelle di impedenze equivalenti ad U, nel senso sopra precisato, costituiscono una duplice infinità.

La provata esistenza di una duplice infinità di stelle di impedenze equivalenti ad U, per una data situazione di funzionamento, è il contenuto del cosiddetto *teorema di equivalenza* per i sistemi trifase. Si osservi che una stella di impedenze che sia equivalente ad un carico U nel senso appena chiarito, lo è certamente anche sotto il profilo energetico, vale a dire essa assorbe dalla linea trifase le stesse potenze di U. In conseguenza di ciò è possibile esprimere la potenza complessa richiesta da U come somma delle potenze complesse assorbite dalle singole impedenze che formano una qualunque tra le infinite stelle equivalenti ad U. Si ha quindi:

$$\overline{N} = \overline{E}_1 \overline{I}_1^* + \overline{E}_2 \overline{I}_2^* + \overline{E}_3 \overline{I}_3^*$$

dove $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \overline{E}_3$ sono le tensioni ai capi di una generica stella equivalente e, per quanto detto precedentemente, si può concludere che:

la potenza complessa assorbita da un utilizzatore U in una data condizione di funzionamento è invariante rispetto alla scelta della stella di impedenze equivalente ad U.