unità 2.

La trasformata di Laplace

I sistemi lineari (elettrici, meccanici, idraulici, termici, ecc.) sono descritti da modelli matematici costituiti da equazioni differenziali e/o integro-differenziali, nelle quali la sollecitazione e la risposta sono entrambe funzioni del tempo.

Poiché la soluzione di tali equazioni non è sempre agevole, si preferisce ricorrere all'uso della trasformata di Laplace che consente di trasformare le equazioni differenziali e integro-differenziali in equazioni algebriche, nelle quali la sollecitazione e la risposta sono funzioni della variabile complessa *s*.

La soluzione delle equazioni algebriche in *s*, in tal modo, si ottiene applicando le regole di soluzione delle equazioni algebriche studiate nei corsi di matematica.
Con tale metodo si ottiene, mediante una operazione di antitrasformazione, la soluzione dell'equazione differenziale coincidente, nel caso specifico dello studio dei sistemi, con la risposta del sistema alla sollecitazione applicata (fig. 2.1).

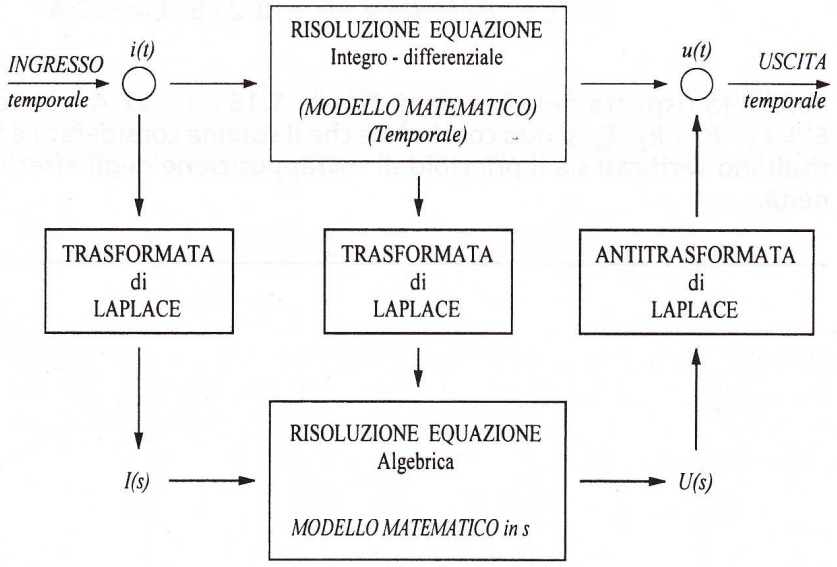


Fig. 2.1

Da quanto esposto si intuisce come la trasformata di Laplace faciliti lo studio dei sistemi lineari perché riduce le difficoltà derivanti dalla ricerca delle soluzioni delle equazioni differenziali.

2.1 Definizione di poli e zeri

Molte applicazioni della teoria dei sistemi implicano, come si vedrà, la conoscenza dei poli e degli zeri di funzioni di variabile complessa *F*(*s*).
Si consideri, ad esempio, una funzione rapporto di due polinomi in *s* del tipo:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{(s+1)\cdot(s+2)}{(s+3)\cdot(s+5)} \qquad [2.1]$$

Si definiscono zeri della funzione $F(s)$ i valori di s che rendono nullo il suo numeratore.

Uguagliando a zero il numeratore della [2.1] si ottiene l'equazione:

$$(s+1)\cdot(s+2)=0 \qquad [2.2]$$

Le soluzioni della [2.2] sono gli zeri della funzione: $z_1=-1$ e $z_2=-2$.

Si definiscono poli della funzione $F(s)$ i valori di s che rendono nullo il suo denominatore.

Uguagliando a zero il denominatore della [2.1] si ottiene l'equazione:

$$(s+3)\cdot(s+5)=0 \qquad [2.3]$$

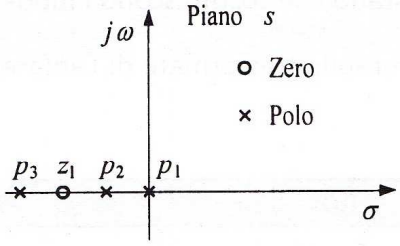


Fig. 2.2

Le soluzioni della [2.3] sono i poli della funzione: $p_1=-3$ e $p_2=-5$.
I poli e gli zeri, in quanto radici delle equazioni ottenute uguagliando a zero polinomi con coefficienti reali, possono essere *reali semplici, reali con molteplicità r, complessi coniugati, complessi coniugati con molteplicità r.*
Dalla [2.1] risulta evidente che una funzione $F(s)$ non può avere poli uguali agli zeri, perché in tal caso si potrebbe procedere a una semplificazione.
I poli e gli zeri possono essere rappresentati sul piano complesso s come riportato in figura 2.2.

Esempio 1

Si consideri la funzione:

$$F(s)=\frac{5\cdot(s+3)}{s\cdot(s+2)\cdot(s+4)^2}$$

Uguagliando a zero il suo denominatore si ottengono i poli: $p_1=0$, $p_2=-2$ e $p_3=-4$. Il polo p_3 ha una molteplicità $r=2$ perché il fattore $(s+4)$ è elevato al quadrato.
La funzione ha inoltre uno zero $z_1=-3$ perché $F(s)=0$ per $s=-3$.

2.2 Trasformata di Laplace

L'operazione di trasformazione (fig. 2.3) stabilisce una corrispondenza biunivoca[1] tra gli elementi dell'insieme di partenza definito da una funzione $f(t)$ del tempo e quelli dell'insieme di arrivo definito da una funzione $F(s)$ dipendente da una variabile complessa $s=\sigma+j\omega$, in cui σ è la parte reale ed ω il coefficiente della parte immaginaria[2].

[1] Biunivoca significa che ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme e viceversa.
[2] Una funzione $F(s)$ è detta funzione di variabile complessa s se per ogni s esiste la corrispondente $F(s)$.

Fig. 2.3

Data una funzione del tempo $f(t)$ tale che $f(t) = 0$ per $t < 0$, si definisce trasformata unilaterale di Laplace[3] della funzione $f(t)$ la relazione:

$$L[f(t)] = F(s)$$

dove L è l'operatore matematico che indica l'operazione di trasformazione sulla funzione $f(t)$.

La trasformata di Laplace trova larga applicazione nella soluzione di problemi meccanici, elettrici, elettronici ecc., perché può essere utilizzata per risolvere le equazioni integro-differenziali lineari a coefficienti costanti che costituiscono i modelli matematici di molti sistemi fisici reali.
Nella tabella 2.1 sono riassunti alcuni teoremi sulle trasformate di Laplace.

TAB. 2.1

Nome	$f(t)$	$F(s)$
Definizione[4]	$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-s\cdot t}\cdot f(t)\cdot dt$	$L[f(t)] = F(s)$
Prodotto di k per $f(t)$	$L[k\cdot f(t)]$	$k\cdot F(s)$
Teorema della linearità	$L[k_1\cdot f_1(t)+k_2\cdot f_2(t)+\ldots]$	$k_1\cdot F_1(s)+k_2\cdot F_2(s)+\ldots$
Teorema della derivata	$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$	$s\cdot F(s)$
Teorema dell'integrale	$L\left[\int f(t)\cdot dt\right]$	$\frac{1}{s}\cdot F(s)$
Teorema del valore finale	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$
Teorema del valore iniziale	$f(0) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$	$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$

Il *teorema del valore finale* e quello del *valore iniziale* sono utili perché consentono di calcolare il valore finale e quello iniziale di una funzione $f(t)$ conoscendo la sua trasformata di Laplace e senza dover eseguire l'operazione di antitrasformazione.
Il teorema del valore finale non è valido se i poli giacciono sull'asse immaginario (escludendo l'origine) o nel semipiano destro del piano complesso s perché in questi casi la funzione $f(t)$ contiene termini sinusoidali o crescenti esponenzialmente e quindi non è possibile calcolare il suo valore finale.

---

[3] Nella trasformata bilaterale la $f(t)$ è definita per $-\infty < t < +\infty$.
[4] L'unità di misura della variabile s deve essere il *reciproco di un tempo* [secondo]$^{-1}$ in quanto l'esponente avente come base il numero di Neper deve essere adimensionale. Non tutte le funzioni ammettono la traformata di Laplace, ma solo quelle per le quali l'integrale di Laplace $\int_0^\infty e^{-s\cdot t}\cdot f(t)\cdot dt$ ammette un valore finito per uno o più valori della variabile complessa s.

2.2.1 ● Antitrasformata di Laplace di funzioni razionali fratte

La trasformata di Laplace, come già detto, semplifica la risoluzione di problemi reali perché riconduce le equazioni integro-differenziali a equazioni algebriche che permettono di trovare facilmente la soluzione di un problema nel dominio della variabile complessa s.
Da tale soluzione si ottiene poi la risposta nel dominio del tempo con l'operazione di antitrasformazione:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

dove L^{-1} è l'operatore di antitrasformazione di Laplace.
L'antitrasformata di Laplace gode, al pari della trasformata di Laplace, dell'importante *proprietà della linearità*.
Per determinare l'antitrasformata di funzioni razionali fratte può essere utilizzata la tabella 2.2 o il metodo dello sviluppo di Heaviside presentato negli esercizi.

TAB. 2.2 *Trasformata di Laplace delle funzioni più note*

N°	Trasformata di Laplace $F(s)$	Funzione del tempo $f(t)$	N°	Trasformata di Laplace $F(s)$	Funzione del tempo $f(t)$
1	1	$\delta(t)$	13	$\frac{k}{s\cdot(1+\tau\cdot s)}$	$k\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
2	$\frac{1}{s}$	1	14	$\frac{1}{(s+a)\cdot(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}\cdot\left(e^{-a\cdot t}-e^{-b\cdot t}\right)$
3	$\frac{k}{s}$	k	15	$\frac{k}{(s+a)\cdot(s+b)}$	$\frac{k}{b-a}\cdot\left(e^{-a\cdot t}-e^{-b\cdot t}\right)$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	16	$\frac{s}{(s+a)\cdot(s+b)}$	$\frac{a}{a-b}\cdot e^{-a\cdot t}+\frac{b}{b-a}\cdot e^{-b\cdot t}$
5	$\frac{k}{s^2}$	$k\cdot t$	17	$\frac{k\cdot s}{(s+a)\cdot(s+b)}$	$k\cdot\left[\frac{a}{a-b}\cdot e^{-a\cdot t}+\frac{b}{b-a}\cdot e^{-b\cdot t}\right]$
6	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-a\cdot t}$	18	$\frac{(1+\tau\cdot s)}{(1+\tau_1\cdot s)\cdot(1+\tau_2\cdot s)}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\cdot\left[\left(1-\frac{\tau}{\tau_1}\right)\cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\left(1-\frac{\tau}{\tau_2}\right)\cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]$
7	$\frac{k}{s+a}$	$k\cdot e^{-a\cdot t}$	19	$\frac{k}{s\cdot(s+a)\cdot(s+b)}$	$\frac{k}{a\cdot b}\cdot\left(1-\frac{b}{b-a}\cdot e^{-a\cdot t}+\frac{a}{b-a}\cdot e^{-b\cdot t}\right)$
8	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}\cdot t^{n-1}$	20	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen}\omega\cdot t$
9	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}\cdot t^{n-1}\cdot e^{-a\cdot t}$	21	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega\cdot t$
10	$\frac{1}{s\cdot(s+a)}$	$\frac{1}{a}\cdot\left(1-e^{-a\cdot t}\right)$	22	$\frac{\omega^2}{s\cdot(s^2+\omega^2)}$	$1-\cos\omega\cdot t$
11	$\frac{k}{s\cdot(s+a)}$	$\frac{k}{a}\cdot\left(1-e^{-a\cdot t}\right)$	23	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-a\cdot t}\cdot\operatorname{sen}\omega\cdot t$
12	$\frac{1}{s\cdot(1+\tau\cdot s)}$	$\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$			

2.2.2 ● Richiami sui numeri complessi

TAB. 2.3

Numero complesso	Coniugato di z	Modulo di z	Fase di z	Definizione
$z = x + j \cdot y$	$z^* = x - j \cdot y$	$\lvert z \rvert = \sqrt{(x^2 + y^2)}$	$\phi = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$	$j^2 = -1$

TAB. 2.4

Numero complesso	Forma trigonometrica	Forma cartesiana	Forma esponenziale	Forma polare
$z = x + j \cdot y$	$z = \lvert z \rvert \cdot (\cos\phi + j \cdot \text{sen}\phi)$	$z = x + j \cdot y$	$z = \lvert z \rvert \cdot e^{j \cdot \phi}$	$z = \lvert z \rvert \angle\phi$

TAB. 2.5

Formule di Eulero	
$e^{j \cdot \phi} = \cos\phi + j \cdot \text{sen}\phi$	$\cos\phi = \frac{e^{j \cdot \phi} + e^{-j \cdot \phi}}{2}$
$e^{-j \cdot \phi} = \cos\phi - j \cdot \text{sen}\phi$	$\text{sen}\phi = \frac{e^{j \cdot \phi} - e^{-j \cdot \phi}}{2 \cdot j}$

TAB. 2.6

Numero complesso	Numero complesso	Operazione	Risultato
$z_1 = x_1 + j \cdot y_1$	$z_2 = x_2 + j \cdot y_2$	$z_1 + z_2$	$z = (x_1 + x_2) + j \cdot (y_1 + y_2)$
$z_1 = x_1 + j \cdot y_1$	$z_2 = x_2 + j \cdot y_2$	$z_1 - z_2$	$z = (x_1 - x_2) + j \cdot (y_1 - y_2)$
$z_1 = x_1 + j \cdot y_1$	$z_2 = x_2 + j \cdot y_2$	$z_1 \cdot z_2$	$z = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$ $z = \lvert z_1 \rvert \cdot e^{j \cdot \phi_1} \cdot \lvert z_2 \rvert \cdot e^{j \cdot \phi_2}$ $\quad z = \lvert z_1 \rvert \cdot \lvert z_2 \rvert \cdot e^{j \cdot (\phi_1 + \phi_2)}$
$z_1 = x_1 + j \cdot y_1$	$z_2 = x_2 + j \cdot y_2$	$\frac{z_1}{z_2}$	$z = \frac{(x_1 + j \cdot y_1) \cdot (x_2 - j \cdot y_2)}{(x_2 + j \cdot y_2) \cdot (x_2 - j \cdot y_2)}$ $z = \frac{\lvert z_1 \rvert \cdot e^{j \cdot \phi_1}}{\lvert z_2 \rvert \cdot e^{j \cdot \phi_2}}$ $\quad z = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert} \cdot e^{j \cdot (\phi_1 - \phi_2)}$

Esempio 2

Si calcoli l'antitrasformata di Laplace della funzione:

$$F(s) = \frac{5}{(s+2) \cdot (s+3)}$$

La funzione $F(s)$ presenta due poli reali e negativi, $p_1 = -2$ e $p_2 = -3$.
Dal rigo 15 della tabella 2.2 si ricava:

$$L^{-1}\left[\frac{5}{(s+2) \cdot (s+3)}\right] = \frac{5}{3-2} \cdot \left(e^{-2 \cdot t} - \cdot e^{-3 \cdot t}\right)$$

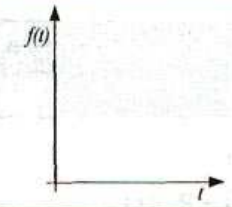
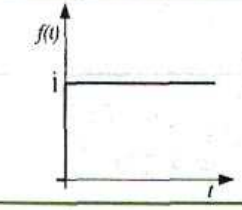
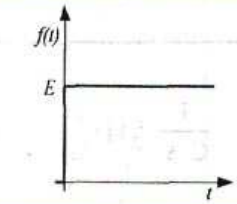
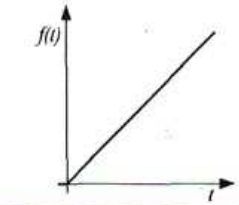
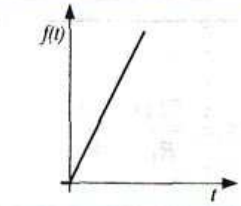
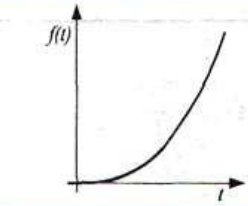
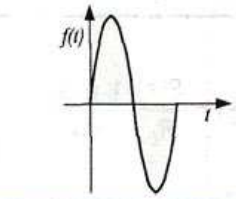
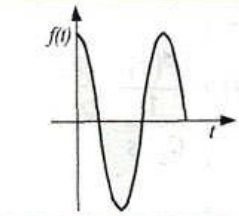
L'antitrasformata di Laplace della funzione è:

$$f(t) = 5 \cdot e^{-2 \cdot t} - 5 \cdot e^{-3 \cdot t}$$

3.5 Trasformata di Laplace dei segnali di prova

Senza entrare nel merito delle dimostrazioni, per le quali si rimanda a testi specializzati, nella tabella 3.1 sono riportate le trasformate dei segnali più frequentemente utilizzati nell'ambito dello studio dei sistemi. Questi segnali, detti segnali canonici o segnali

TAB. 3.1 *Tabella di trasformazione dei segnali canonici*

Grafici	Funzione $f(t)$	Trasformata $F(s)$	Denominazione
	$f(t)=\delta(t)$	$F(s)=1$	Funzione delta di Dirac
	$f(t)=\begin{cases}1 \text{ per } t\geq 0\\ 0 \text{ per } t<0\end{cases}$	$F(s)=\frac{1}{s}$	Funzione a gradino di ampiezza unitaria
	$f(t)=\begin{cases}E \text{ per } t\geq 0\\ 0 \text{ per } t<0\end{cases}$	$F(s)=\frac{E}{s}$	Funzione a gradino di ampiezza E
	$f(t)=\begin{cases}t \text{ per } t\geq 0\\ 0 \text{ per } t<0\end{cases}$	$F(s)=\frac{1}{s^2}$	Funzione a rampa unitaria
	$f(t)=\begin{cases}k\cdot t \text{ per } t\geq 0\\ 0 \text{ per } t<0\end{cases}$	$F(s)=\frac{k}{s^2}$	Funzione a rampa con coefficiente angolare k
	$f(t)=\begin{cases}t^2 \text{ per } t\geq 0\\ 0 \text{ per } t<0\end{cases}$	$F(s)=\frac{2}{s^3}$	Funzione a parabola unitaria
	$f(t)=\begin{cases}0 \text{ per } t<0\\ sen(\omega\cdot t) \text{ per } t\geq 0\end{cases}$	$F(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	Funzione sinusoidale
	$f(t)=\begin{cases}0 \text{ per } t<0\\ cos(\omega\cdot t) \text{ per } t\geq 0\end{cases}$	$F(s)=\frac{s}{s^2+\omega^2}$	Funzione cosinusoidale