Stabilità

Uno dei requisiti più importanti richiesti ad un sistema di controllo è la stabilità, ossia la capacità del sistema di raggiungere un stato di equilibrio dopo la fase di regolazione.
Per comprendere il concetto di stabilità si consideri il sistema rappresentato in figura 4.1, costituito da un condensatore e da un generatore di corrente costante (sollecitazione limitata). Il sistema è instabile perché la tensione ai capi del condensatore (risposta) non è limitata ma tende all'infinito quando $t \to \infty$ (si ricorda che un condensatore è sottoposto a una scarica distruttiva quando la tensione ai suoi capi supera la tensione di lavoro).
Il sistema rappresentato in figura 4.2, invece, è stabile quando è sollecitato da un gradino di tensione di ampiezza minore della tensione di lavoro del condensatore. Al termine della fase transitoria, infatti, la tensione ai capi del condensatore è uguale al valore della sollecitazione applicata.

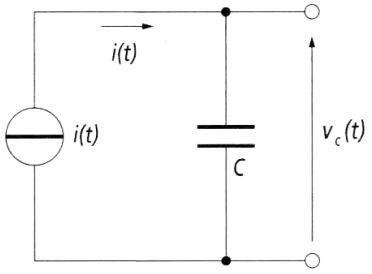

Fig. 4.1

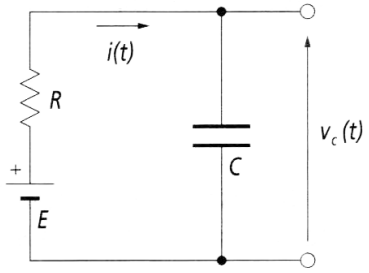

Fig. 4.2

Dagli esempi fatti si trae la seguente definizione di stabilità:

un sistema lineare, invariante nel tempo e con condizioni iniziali nulle, è stabile se la sua risposta è limitata in corrispondenza di una qualsiasi sollecitazione limitata, altrimenti è instabile (stabilità BIBO, *Bounded Input - Bounded Output*, ingresso limitato - uscita limitata).

La stabilità di un sistema può essere studiata, come si vedrà, nel dominio del tempo o in quello della frequenza. Nel primo caso la stabilità del sistema si ricava osservando la risposta nel dominio del tempo o, più semplicemente, la posizione dei poli nel piano complesso s, mentre nel secondo caso è sufficiente tracciare i diagrammi di Nyquist e/o Bode della funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema.
Lo studio della stabilità dei sistemi nel dominio del tempo è lungo e laborioso, perché per ottenere la risposta è necessario risolvere equazioni integro-differenziali oppure eseguire operazioni di trasformazione e antitrasformazione.
Per evitare le difficoltà di calcolo è preferibile studiare la stabilità di un sistema lineare e invariante nel tempo, utilizzando i metodi sottoelencati basati sull'analisi della funzione di trasferimento ad anello aperto e della funzione caratteristica:

- criterio di Nyquist;
- criterio di Bode;
- criterio di Routh-Hurwitz;
- metodo del luogo delle radici.

Correlazione tra stabilità e posizione dei poli nel piano *s*

Una definizione di stabilità più completa di quella precedentemente introdotta fa riferimento ad una sollecitazione impulsiva (fig. 4.3).

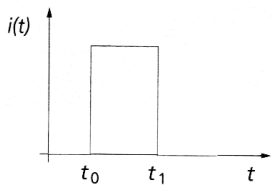

Fig. 4.3

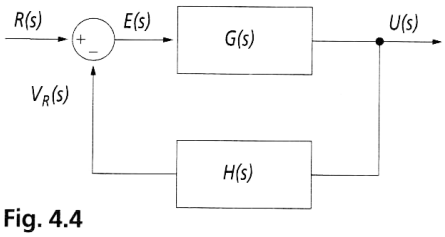

Fig. 4.4

Le condizioni per verificare la stabilità di un sistema sono:

- la sollecitazione deve avere durata limitata, deve, cioè, essere nulla per $t < t_0$ e per $t > t_1$, dove t_0 e t_1 sono ripettivamente gli istanti in corrispondenza dei quali ha inizio e termine l'azione della sollecitazione;
- l'ampiezza della risposta deve tendere a zero o deve assumere un valore limitato quando viene rimossa la sollecitazione.

Considerato che la funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s)$ di un sistema dipende solo dalla sua natura e non dalla forma della sollecitazione ad esso applicata, si dimostra che la stabilità è una caratteristica intrinseca della struttura del sistema.
A tal fine si consideri un sistema ad anello chiuso, lineare e invariante nel tempo, e sia $W(s)$ la sua funzione di trasferimento (fig. 4.4):

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

Si dimostra che la trasformata della risposta di un sistema dipende solo dalla funzione di trasferimento quando esso è sollecitato da un impulso $\delta(t)$ di Dirac, la cui trasformata è $L[\delta(t)] = 1$:

$$U(s) = W(s) \cdot 1 = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} \qquad [4.1]$$

Per studiare la stabilità di un sistema, pertanto, è sufficiente studiare la risposta relativa all'impulso di Dirac, ottenuta analizzando la posizione dei poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso.
Per verificare se un sistema è stabile o meno è necessario ricavare le radici dell'equazione ottenuta eguagliando a zero il denominatore della [4.1]:

$$1 + G(s) \cdot H(s) = 0 \qquad [4.2]$$

La [4.2] è detta **equazione caratteristica** e la sua soluzione fornisce i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso. Si dimostra che la risposta all'impulso $\delta(t)$ varia in relazione ai poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso come di seguito elencato.

- **Un sistema è stabile asintoticamente** perché la risposta $u(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ se tutti i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s)$ sono reali negativi o complessi coniugati a parte reale negativa (fig. 4.5).

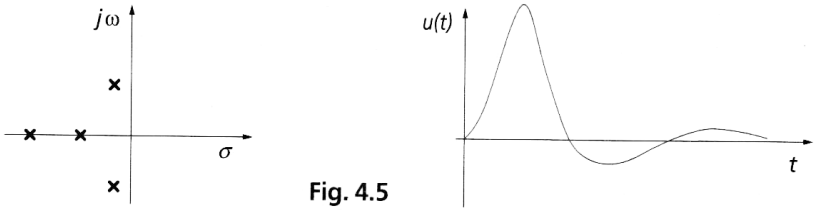

Fig. 4.5

- **Un sistema è stabile marginalmente** perché la risposta $u(t)$ tende ad un valore costante quando $t \to \infty$ se la funzione di trasferimento ad anello chiuso ha un solo polo nell'origine (fig. 4.6). Naturalmente, i rimanenti poli devono essere negativi se reali o a parte reale negativa se complessi coniugati.

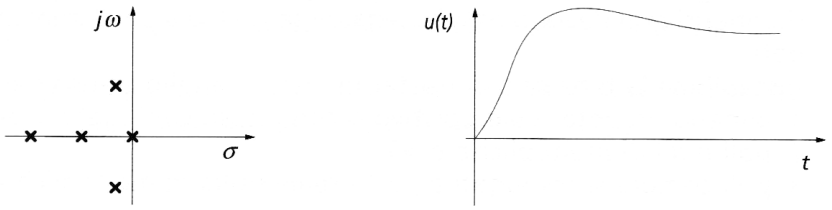

Fig. 4.6

- **Un sistema è stabile marginalmente** perché la risposta $u(t)$ è una oscillazione di ampiezza costante quando $t \to \infty$ se la funzione di trasferimento ad anello chiuso ha una coppia di poli complessi coniugati a parte reale nulla (fig. 4.7). Naturalmente, i rimanenti poli devono essere negativi se reali o a parte reale negativa se complessi coniugati.

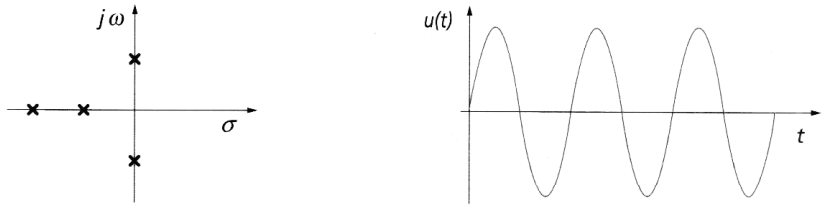

Fig. 4.7

- **Un sistema è instabile** perché la risposta $u(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ se la funzione di trasferimento ad anello chiuso ha almeno un polo reale positivo o complesso coniugato a parte reale positiva (fig. 4.8).

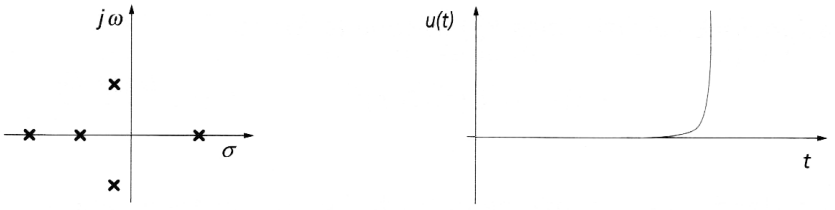

Fig. 4.8

- **Un sistema è instabile** perché la risposta $u(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ se la funzione di trasferimento ad anello chiuso ha poli nulli di molteplicità $q > 1$ (fig. 4.9).

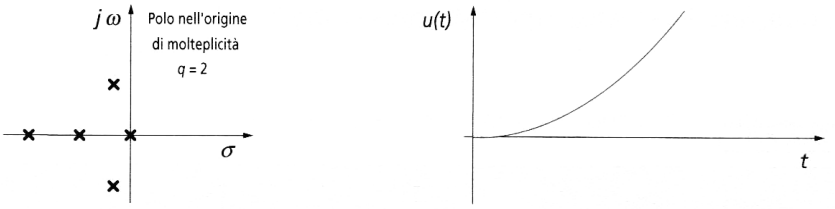

Fig. 4.9

- **Un sistema è instabile** perché la risposta $u(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ se la funzione di trasferimento ad anello chiuso ha poli complessi coniugati a parte reale nulla di molteplicità $r > 1$ (fig. 4.10).

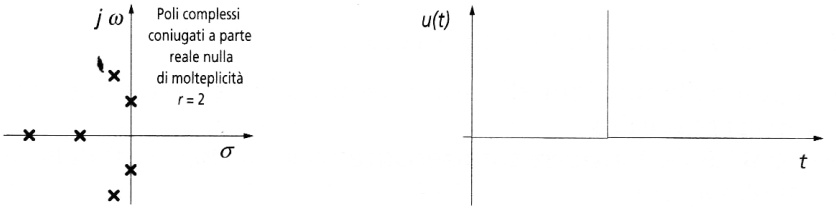

Fig. 4.10

In definitiva si può affermare che un sistema è:

- **stabile asintoticamente** se tutti i poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(s)$ sono reali negativi o complessi coniugati a parte reale negativa;
- **stabile marginalmente** se la funzione di trasferimento ad anello chiuso ha un solo polo nell'origine o una coppia di poli complessi coniugati a parte reale nulla (naturalmente i rimanenti poli devono essere negativi se reali o a parte reale negativa se complessi coniugati);
- **instabile** se la funzione di trasferimento ad anello chiuso ha:
  1. almeno un polo reale positivo o complesso coniugato a parte reale positiva;
  2. poli nulli di molteplicità $q > 1$;
  3. poli complessi coniugati a parte reale nulla di molteplicità $r > 1$.