# Indice

**INDICE** 1
**INTRODUZIONE** 2
**I POSSIBILI DISTURBI** 4
**DEFINIZIONE DI AFFIDABILITA' E SCOPO DELLA TEORIA** 7
**L'AFFIDABILITA' COME FUNZIONE DEL TEMPO** 11
**TEMPO MEDIO AL GUASTO (MTTF)** 14
**AFFIDABILITÀ CONDIZIONATA** 15
**FUNZIONE TASSO DI GUASTO** 16
**MODELLO DI AFFIDABILITA' ESPONENZIALE** 18
**DISTRIBUZIONE WEIBULL** 20
**CONFRONTO TRA SISTEMI IN BASE AD *R(T), H(T), ED M*** 21
**DISPONIBILITÀ** 23
**MTBF (MEAN TIME BETWEEN FAILURE)** 23
**SISTEMI COMPOSTI** 24
SISTEMI IN SERIE 27
SISTEMI IN PARALLELO 28
**BIBLIOGRAFIA** 32

# INTRODUZIONE

La teoria dell'affidabilità si propone di descrivere e misurare la capacità di funzionamento di dispositivi o sistemi ingegneristici. Per ogni dato sistema, tale misura serve a quantificare il grado di "fiducia" che si può avere riguardo al funzionamento del sistema, inteso come assolvimento degli obiettivi per i quali il sistema stesso è progettato e costruito; poiché le prestazioni di ogni sistema tendono inevitabilmente a diminuire nel tempo, è opportuno che l'affidabilità di un sistema sia relazionata al tempo. Tale misura non è altro che un valore numerico, espresso su una scala di numeri reali tra 0 e 1, poiché definita in termini di ***probabilità***.

Quella dell'affidabilità è una disciplina matematica, che fa parte di un più vasto settore disciplinare, ossia il Calcolo delle probabilità, anche se è nata in ambito ingegneristico. Si tratta di una delle discipline scientifiche più "giovani"; essa è nata, infatti, (in ambito militare) a ridosso degli anni della Seconda Guerra mondiale: la prima definizione quantitativa di affidabilità è stata data negli USA, nel 1952 nella versione *"la probabilità che un oggetto adempia alla sua specifica funzione per un tempo determinato e sotto determinate condizioni"*. Comunque, i primi studi sull'affidabilità, a carattere sperimentale, si hanno tra le due guerre mondiali in campo aeronautico dove bisognava scegliere quale fosse la migliore configurazione per il sistema di propulsione degli aerei a più motori. Dopo aver notato che l'effetto dei malfunzionamenti era notevole da un punto di vista economico, si cercarono soluzioni ingegneristiche ai problemi di affidabilità, che arrivarono alla soluzione del 1952.

Negli anni Sessanta, con la nascita dei programmi di assicurazione della qualità, imposti contrattualmente ai fornitori, con lo scopo di aumentare la qualità dei prodotti e dei materiali acquisiti, si vide la diffusione della disciplina dall'ambito militare a quello civile.

L'ulteriore revisione della famiglia di norme ISO 9000, (dove per ISO s'intende *International Organization for Standardization*, organizzazione che attraverso un comitato tecnico, l'ITC 176, ha emesso nel 1987 e revisionato nel 1994 prima e nel 2000 poi, una serie di norme riguardanti la qualità), la Vision 2000, propone il *total quality management* (gestione totale di qualità) che, attraverso la pianificazione e il miglioramento continuativo, costituisce uno strumento essenziale non solo per l'assicurazione della qualità del prodotto, ma anche per la competitività dell'azienda in quanto organismo dinamico e capace di raccogliere le sfide del mercato. In questo ambito trovano spazio ed importanza gli studi

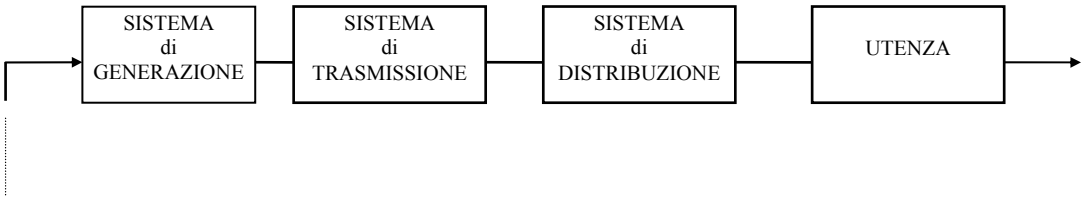
affidabilistici che diventano una prerogativa per l'azienda che intende soddisfare i requisiti dettati dalle norme sulla qualità.

Di qui si comprende come l'affidabilità abbia un ruolo centrale per le aziende che puntano sulla sicurezza oltre che la qualità, intesa come "*La capacità di un insieme di caratteristiche inerenti un prodotto, sistema o processo di ottemperare a requisiti di clienti e di altre parti interessate*", secondo quanto definito dalla norma UNI ISO/DIS 9000 del 2000, dove per *caratteristica* si intende un elemento distintivo e per *requisito* un'esigenza o aspettativa che può essere espressa ma che generalmente è implicita o cogente.

Per introdurre le problematiche della affidabilità, si consideri un sistema ingegneristico, il quale è progettato e costruito per svolgere determinate funzioni:

$$\text{SISTEMA} \Rightarrow \text{FUNZIONI}$$

Ad esempio un sistema elettrico di potenza è caratterizzato da uno schema del tipo:




Lo scopo di tale sistema è quello di fornire energia agli utenti, secondo la potenza elettrica richiesta, il "carico" del sistema; questo varia a seconda dei giorni, delle condizioni atmosferiche (in primo luogo la temperatura), e da tante altre cause esterne al sistema stesso. Una volta effettuata una adeguata previsione del carico, il sistema viene progettato e costruito in maniera tale da soddisfare le richieste e i vincoli di funzionamento specifici del sistema (ad esempio, quelli relativi al regime sinusoidale).

L'affidabilità si occupa di "come" il sistema funziona, ovvero della sua capacità di assolvere alle sue funzioni tenendo presente la possibilità di disturbi che possono alterare il suo funzionamento normale.

# I POSSIBILI DISTURBI

I possibili disturbi di cui si parlava nell'esempio citato nell'introduzione sono costituiti in primo luogo da:

1. guasti dei componenti del sistema
2. disturbi esterni (sollecitazioni impreviste).

Per quanto riguarda il primo aspetto, è possibile affermare che, in generale, si indica con il termine "**guasto"** la cessazione dell'attitudine di un dispositivo ad adempiere alla funzione richiesta, o una variazione delle prestazioni del dispositivo che lo renda inservibile per l'uso al quale esso era destinato. È esperienza comune il fatto che un apparato, per quanto ben progettato e realizzato, possa subire dei guasti durante il funzionamento; la classificazione dei guasti può essere effettuata rispetto a diversi aspetti, di seguito se ne propongono alcune:

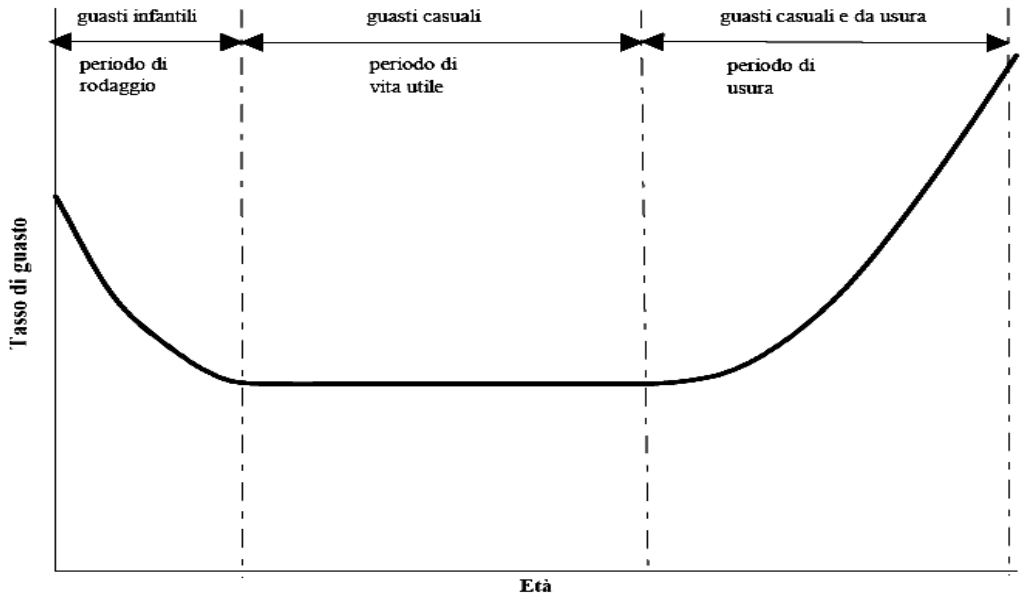
- rispetto alle cause che li generano è possibile avere:
  - guasti dovuti ad un impiego improprio;
  - guasti dovuti a deficienza intrinseca (qualità dei materiali, problemi di progettazione, ecc….);
  - guasti dovuti all'usura.
- Rispetto alle variazioni di prestazione:
  - guasti totali (variazione delle prestazioni tale da impedirne del tutto il funzionamento);
  - guasti parziali (variazione delle prestazioni tale da non comprometterne del tutto il funzionamento);
  - guasti intermittenti (una successione casuale di periodi di guasto e di periodi di funzionamento).
- Rispetto all'impatto che si ha sul sistema/componente:
  - guasti critici (rappresentano un rischio per l'incolumità delle persone);
  - guasti di primaria importanza (riducono la funzionalità dell'intero sistema del quale fanno parte);

- guasti di secondaria importanza (non riducono la funzionalità dell'intero sistema del quale fanno parte).

- Rispetto alle modalità temporali di guasto:
  - guasti improvvisi o accidentali (dovuti a difetti del materiale oppure a fenomeni accidentali);
  - guasti dovuti a fenomeni di invecchiamento (ad esempio: usura meccanica di componenti, diminuzione della resistenza a rottura di un dispositivo meccanico, ecc…).

- Ultima, ma fondamentale classificazione può essere effettuata in base alla loro distribuzione durante la vita di una famiglia di componenti uguali; in tal senso si distinguono:
  - guasti infantili (la natura di questi guasti è legata a difetti intrinseci dei componenti che non sono emersi durante i collaudi o, in presenza di una buona progettazione, sono dovuti ad errori di costruzione o di montaggio; il periodo durante il quale si manifestano è generalmente la fase iniziale della vita dei componenti e la probabilità che si che si verifichino decresce gradualmente);
  - guasti casuali (presentano una probabilità di verificarsi che è indipendente dal tempo e sono dovuti a fattori incontrollabili che neanche un buon progetto ed una buona esecuzione possono eliminare; possono verificarsi in qualunque momento della vita del componente);
  - guasti per usura (sono dovuti a fenomeni di invecchiamento e deterioramento e per questo motivo la loro probabilità di accadimento cresce al passare del tempo).

  Da ciò che è stato detto per quest'ultima classificazione è possibile affermare che l'andamento del tasso di guasto è determinato in funzione dell'età dei componenti (vedi figura):




Da una rapida analisi della curva (denominata "a vasca da bagno"), è possibile affermare che la zona ottimale di lavoro è quella centrale dove possono intervenire solo guasti casuali e pertanto si ha rischio minimo.

Per quanto riguarda i disturbi esterni, si pensi, per un sistema elettrico, alla mancanza di energia primaria, o a un imprevisto aumento del carico di utenza.

La distinzione tra i vari tipi di guasto è fatta a titolo puramente descrittivo, in quanto spesso non è possibile separare le diverse cause sopra elencate: è chiaro, ad esempio, che una sollecitazione eccessiva, anche nel caso in cui non causi un guasto, può contribuire a diminuire la "resistenza" dell'apparato, facilitandone così il guasto in un tempo futuro; ma, dal punto di vista del calcolo dell'affidabilità, non interessa tanto sapere la causa prima del guasto, quanto conoscere la probabilità che si verifichi (indipendentemente dalle cause che lo hanno generato che hanno importanza in sede di progettazione, manutenzione, ecc...).

# DEFINIZIONE DI AFFIDABILITA' E SCOPO DELLA TEORIA

Da un punto di vista concettuale, ***l'affidabilità di un sistema è dunque una misura della capacità del sistema di funzionare*** (ossia di assolvere alle funzioni per cui è progettato e costruito) ***nel tempo***, ovvero di far fronte ad eventuali guasti o disturbi esterni. Questi ultimi eventi sono "aleatori", ossia affetti da incertezza, nel senso che non si può sapere a priori se si verificheranno o meno e in quale entità; per questo motivo due componenti non saranno mai uguali dal punto di vista delle prestazioni nel tempo, anche se sono caratterizzati dalle stesse specifiche.

Per poter quantificare la capacità dei sistemi di funzionare occorre:

- individuare delle grandezze che siano in grado di quantificare l'attitudine degli apparati a fornire nel tempo una prestazione soddisfacente;
- sviluppare metodi e tecniche per il calcolo delle suddette grandezze;
- disporre di criteri decisionali che consentano di stabilire di volta in volta se la situazione è soddisfacente oppure va migliorata;
- analizzare i vari provvedimenti migliorativi che è possibile adottare (nelle fasi di progettazione, di realizzazione, di esercizio, di manutenzione).

Il motivo per cui studiare la teoria dell'affidabilità può nascere da una specifica richiesta del committente al progettista o al costruttore, oppure da una disposizione di normativa tecnica; può derivare dall'esigenza di ridurre i costi determinati dai guasti, oppure da un obiettivo manageriale di offrire un prodotto (o un servizio) per la fascia più esigente del mercato; può anche derivare da disposizioni legislative, come si verifica, ad esempio, per tutti i casi in cui guasti o malfunzionamenti determinerebbero situazioni di pericolo per le persone oppure di rischio per l'ambiente.

Si è detto che le cause di malfunzionamento di un sistema sono caratterizzate da incertezza; costituiscono, in altri termini, degli eventi aleatori e la teoria quantitativa più sviluppata al momento per la descrizione dell'incertezza è quella della probabilità: per questo è naturale definire l'affidabilità in termini probabilistici.

Come noto, la probabilità di un evento aleatorio è un numero reale compreso tra 0 e 1 associato a tale evento, e rappresenta, secondo l'approccio "classico" o "frequentista", la misura della frequenza con cui tale evento si verifica.

Secondo l'approccio detto "soggettivo", la probabilità di un evento è invece la misura del grado di fiducia (in una scala da 0 a 1) che l'osservatore ripone nel verificarsi dell'evento. Quest'ultima interpretazione, per quanto possa lasciare perplessi, è l'unica che consente di trattare eventi non ripetibili (del tipo: "domani pioverà"; oppure: "la Juventus vincerà Domenica prossima"; oppure, per parlare di affidabilità: "questo dispositivo di nuova costruzione funzionerà per almeno due anni", ecc…). Essa è adatta anche a caratterizzare eventi "singoli" (ad esempio: "testa al prossimo lancio").

***L'affidabilità ("Reliability") di un dato dispositivo (oggetto, sistema, componente) in un dato intervallo di tempo è****, quindi,* ***la probabilità che esso fornisca ininterrottamente le prestazioni richieste in tale intervallo (corretto funzionamento), in condizioni specificate di impiego.***

Nella definizione appena data ci sono tre aspetti, su cui soffermare l'attenzione, ossia:

- le prestazioni richieste (la cosiddetta "missione del sistema");
- le condizioni di funzionamento (ambientali, ecc…);
- il tempo (inteso come durata della missione).

Si illustrano, ora, brevemente tali aspetti.

Innanzitutto, è bene specificare qual è la missione richiesta al sistema, in quanto, per uno stesso sistema, il valore dell'affidabilità può cambiare, e di molto, a seconda della prestazione richiesta.

È chiaro, inoltre, che le condizioni di funzionamento vanno specificate, per quanto possibile, dato che esse influenzano enormemente le capacità di funzionamento. Ad esempio, è chiaro che un isolante progettato e costruito per lavorare (per un determinato *periodo di tempo* e in determinate *condizioni*) ad un dato livello di tensione (ad esempio, di 12 kV), durerà meno se sottoposto ad una tensione maggiore; inoltre le condizioni ambientali (temperatura e umidità) ne influenzeranno anch'esse le prestazioni.

Per quanto riguarda il fattore tempo, è ovvia l'osservazione che l'invecchiamento riduce la probabilità di funzionamento: aumenta infatti il livello di "stress" cui il dispositivo è sottoposto, l'usura, e anche la probabilità di subire un guasto accidentale.

Lo scopo della teoria dell'affidabilità è:

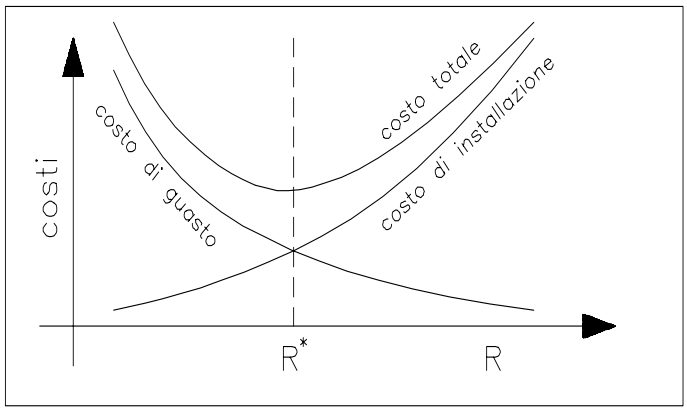
1. Definire delle grandezze atte a misurare l'affidabilità del sistema; ad esempio: *Funzione affidabilità* e *Vita media,* ovvero "tempo medio fino al guasto", *MTTF*

(*Mean Time to Failure*). Tali parametri fanno implicitamente riferimento ad un sistema non riparabile, per il quale cioè il primo guasto sia anche l'ultimo. Per sistemi riparabili (o sostituibili), per i quali si possa cioè eliminare il guasto con una operazione di riparazione o sostituzione dei componenti, vengono introdotti anche altri parametri, quali: *Tempo medio di riparazione MTTR (Mean Time to Repair*), il *Tempo medio tra guasti MTBF (Mean Time Between Failures*), la *Frequenza dei guasti* (numero medio di guasti nell'unità di tempo: tale grandezza a volte è indicata come "*tasso di guasto*"), la *Durata dei guasti* e la *Disponibilità A(t) (Availability*) che è definita come probabilità che il sistema funzioni nell'istante t, indipendentemente da eventuali guasti occorsi in precedenza e poi riparati. Si noti che tutte le grandezze qui citate sono *deterministiche* (ossia non affette da incertezza: esse sono infatti calcolabili, per lo meno in linea di principio, con esattezza, a partire da relazioni matematiche ben precise), non aleatorie come il tempo di funzionamento. È, infatti, opportuno caratterizzare la capacità di funzionamento di un sistema mediante dei parametri "certi", anziché delle variabili aleatorie. In effetti, la teoria dell'affidabilità non è altro che un'applicazione ingegneristica del calcolo delle probabilità, il cui scopo principale è quello di associare ad un dato evento incerto la sua probabilità.

2. Analizzare l'affidabilità di un sistema a partire da quella dei componenti: dato cioè un sistema S formato da più componenti ($C_1 ... C_n$), una volta note o calcolate (vedi punto 3) le affidabilità dei componenti; si tratta di ricavare l'affidabilità dell'intero sistema in funzione di queste.

3. Analisi statistica dei dati (mediante, ad esempio, prove di laboratorio, oppure analisi di dati di esercizio) per ricavare le affidabilità dei componenti, che costituiscono i "parametri di ingresso" necessari al calcolo dell'affidabilità del sistema complessivo.

4. Progetto di sistemi in funzione dell'affidabilità; tenendo conto sia dei costi di disservizio che dei costi di installazione, manutenzione, ecc… Con riferimento a quest'ultimo punto, si consideri a livello intuitivo che all'aumentare dell'affidabilità cresce il costo di installazione e diminuisce quello dovuto ai guasti, perchè diminuisce la probabilità di guasto (vedi figura); diventa così intuitivo che il costo totale, somma dei due costi menzionati, presenti un minimo al variare del valore R di affidabilità del sistema. È utile sottolineare che una visione più moderna del significato di qualità per un'azienda suggerisce, invece, che i costi legati ai guasti divengono più elevati se nascono questioni riguardanti la sicurezza (in cui rientrano fattori come il costo della vita umana, l'inquinamento dell'ambiente e la perdita d'immagine dell'azienda); in tale visione, i costi che riguardano la sicurezza diventano un risparmio, in quanto fanno sì che, in caso di incidente, non si debbano sostenere costi ben maggiori. Naturalmente, in entrambe le visioni esiste un limite destro (Limite Tecnicamente Raggiungibile) oltre il quale non conviene più spingersi per ragioni tecniche: la sicurezza totale, infatti, è impossibile da raggiungere e non avrebbe senso spingersi troppo oltre nell'adottare sistemi di sicurezza che potrebbero rivelarsi controproducenti in rapporto alla loro complessità progettuale e funzionale. Tra i compiti dell'ingegnere progettista, vi è dunque essere quello di trovare il valore R* che minimizza il costo totale.



# L'AFFIDABILITA' COME FUNZIONE DEL TEMPO

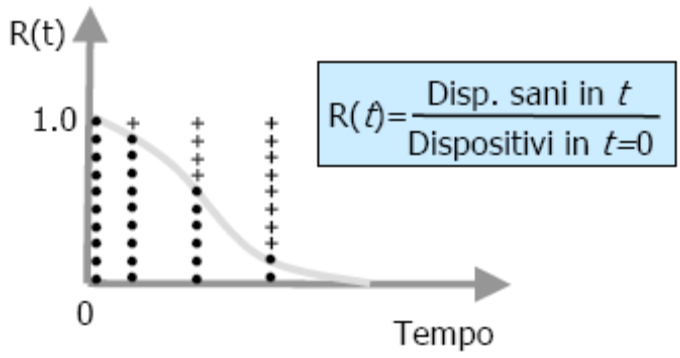
È stato già sottolineato come al trascorrere del tempo di funzionamento di un qualsiasi dispositivo l'affidabilità varia, descrivendo una funzione del tempo delle cui caratteristiche ci si occupa in questo paragrafo. Le condizioni di impiego (che possono essere sollecitazioni di qualsiasi natura), giocano un ruolo fondamentale nel determinare la capacità di resistenza dell'oggetto, generando naturalmente (in assenza di interventi esterni, quali riparazione, manutenzione o sostituzione del componente, o miglioramento delle condizioni operative) la diminuzione di affidabilità nel tempo. Se si prende in considerazione un generico componente, è comune esperienza il fatto che la sua durata di funzionamento non sia prevedibile a priori in maniera deterministica, sia a causa delle tolleranze di fabbricazione, sia a causa della aleatorietà e variabilità delle condizioni di funzionamento, come anche per la eventuale occorrenza di sollecitazioni aleatorie (ad esempio, sovratensioni o corto-circuiti nel caso di componenti elettrici o elettronici). Basti pensare, ad esempio, alla durata di funzionamento di una comune lampada ad incandescenza: generalmente ci si limita a sostituire la lampadina quando non funziona più, ma non si può prevedere con certezza quando succederà.

Tali considerazioni, identificano la durata di vita (o il tempo al guasto) del componente come una variabile aleatoria (v.a.) continua (essendo un tempo, e quindi una variabile a valori nell'insieme dei reali non negativi). Tale v.a., cui ci si riferisce con l'acronimo "*TF", Tempo di funzionamento del sistema, ovvero Tempo fino al guasto (Time to failure), ovvero "durata di vita" (lifetime)*, sarà indicata con *T*, e misurata a partire dall'istante $t = 0$ in cui il dispositivo inizia a funzionare: essa rappresenta così il valore numerico sia della "*durata di funzionamento*" che dell'*"istante di guasto*" del dispositivo, se questo non è riparabile. L'affidabilità del componente al tempo *t*, intesa come probabilità di corretto funzionamento in tutto l'intervallo (0,*t*) è dunque definibile in termini di tale v.a. mediante la relazione:

$$R(t) = P(T > t), \text{ con } (t \geq 0) \qquad (1)$$

in corrispondenza di determinate condizioni, che qui si considerano fissate. Al variare di t, la (1) definisce una funzione del tempo t. E'opportuno notare che, dal punto di vista concettuale, *R(t) non è una funzione dell'istante t, ma dell'intero intervallo (0,t)*: in altri termini, essa non ci dice la probabilità che il componente funzioni, ovvero non si guasti, nell'istante t, ma *la probabilità che funzioni in tutto l'intervallo (0,t), ovvero che si guasti*

*dopo t.* Vista come funzione di *t*, ci aspettiamo, dall'esperienza quotidiana, che *R(t)* abbia valore unitario nell'origine (a meno di casi particolari che qui non consideriamo), sia decrescente, e tenda a zero al divergere di *t* (traduzione matematica del fatto che, prima o poi, tutto ciò che è iniziato ha una fine). La figura che segue concretizza ciò che è stato affermato fin qui; è utile sottolineare che l'andamento della curva è puramente indicativo.




La v.a. *T*, essendo continua, è caratterizzabile probabilisticamente mediante una *funzione densità di probabilità*, *f(t)*, tale che:

$$f(t)dt = P(t < T \leq t + dt), \text{ con } (t \geq 0) \tag{2}$$

rappresenta la probabilità che la variabile aleatoria *T* sia compresa nell'intervallo di tempo di durata infinitesima *dt*, avente inizio in *t*. Naturalmente, *f(t)* deve essere nulla per *t<0* (non si possono avere tempi negativi). La probabilità che il componente si guasti entro l'istante *t* è data dalla *funzione di distribuzione F(t):*

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(u)du \text{ , con } (t \geq 0) \tag{3a}$$

D'ora in poi si ometterà la ovvia condizione: *t≥0*. Il complemento ad 1 della *F(t)* rappresenta, ovviamente, la probabilità che il componente sia correttamente funzionante per un tempo superiore a *t* e ciò, sulla base della definizione data, rappresenta proprio l'affidabilità del componente:

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(u)du \tag{3b}$$

Si noti che la *f(t)* dà informazioni sul comportamento "locale" ovvero nell'istante *t*, del dispositivo, come si vede dalla (2), mentre la *R(t)* e la *F(t)*, come già detto, sono funzioni di

intervallo, e infatti si esprimono mediante integrali dei contributi locali della *f(t)*, come espresso dalle (3).

Uno sguardo alla (3b) chiarisce meglio il fatto che *R(t)* sia riferita ad un intervallo di tempo (la (3b) esprime il fatto che il guasto avvenga *dopo t,* in un istante comunque imprecisato); se *R(t)* appare (ed è) *matematicamente* una funzione dell'istante *t*, è perché l'estremo superiore della (3b) è fissato; nulla vieta di considerare un generico intervallo di tempo (a,b).

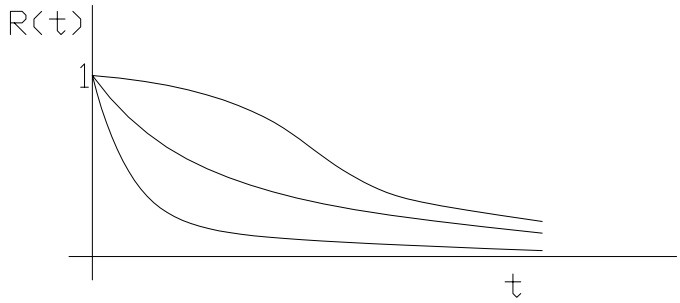
Ricordando il legame tra *f(t)* e *F(t)*, sulla base delle (3), si ha ancora:

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}=-\frac{dR(t)}{dt} \tag{4}$$

La funzione affidabilità *R(t)* gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} R(0)=1 \\ \dfrac{dR(t)}{dt} \leq 0 \ \forall t \\ \lim\limits_{t\to\infty} R(t)=0 \end{cases} \tag{5}$$

Esse si possono ricavare dalla (3b); andamenti tipici della R(t) sono, ad esempio, quelli riportati in figura:




Ad esempio, la più utilizzata delle funzioni affidabilità è quella esponenziale, che ha espressione: $R(t)=\exp\left(-t/m\right)$, con *m>0*; si verifica che essa gode delle proprietà ora elencate. Naturalmente, se è noto che $T \leq b$, allora sia la *f(t)* che la *R(t)* saranno nulle per $t > b$ (si pensi, ad esempio, al caso in cui *T* sia uniforme in *(0,b)*). Generalmente, però, è difficile imporre un limite superiore alla durata di funzionamento.

Talvolta, sulla base di considerazioni pratiche, la *R(t)* viene definita solo in un intervallo [0, $t_0$], dove con $t_0$ si indica un tempo massimo di funzionamento, oltre il quale si considera cessata la vita del componente, anche se non si è verificato alcun guasto, perchè già si sa che oltre tale intervallo di tempo il componente sarà già stato sostituito o eliminato, a causa di innovazioni tecnologiche, cessata utilità del sistema di cui fa parte, ecc…

## TEMPO MEDIO AL GUASTO (MTTF)

Si definisce *tempo medio al guasto* e si indica con il simbolo *MTTF* (*Mean Time To Failure*) il valore medio della variabile aleatoria *T*, ossia il numero *E[T]*. L'*MTTF* rappresenta dunque il tempo medio di buon funzionamento di un dispositivo.

Nella maggior parte delle applicazioni pratiche, la funzione *R(t)* è infinitesima di ordine maggiore di 1 al divergere di *t* (si pensi al caso esponenziale, ad esempio). In tal caso, l'*MTTF* si può ricavare semplicemente integrando la funzione *R(t)*, come si dimostra dalla definizione di media a seguito di integrazione per parti:

$$MTTF = E[T] = \int_0^{+\infty} t\,f(t)dt = \int_0^{+\infty} t\,dF(t) = -\int_0^{+\infty} t\,dR(t) = -[tR(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} R(t)dt$$

da cui, indicando con il simbolo *m* l'*MTTF*:

$$m = E[T] = \int_0^{+\infty} R(t)dt$$

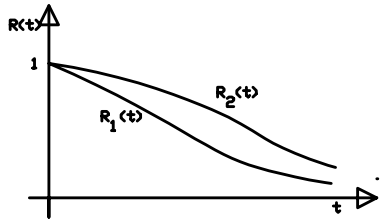
Si noti che, a differenza della *f(t), R(t), F(t),* l'*MTTF* non è una funzione del tempo, ma è una costante (dimensionale, con dimensione di un tempo), che descrive sinteticamente l'affidabilità del componente mediante un *numero deterministico*. Ciò è molto utile in pratica per avere una idea dell'affidabilità del componente senza bisogno di esaminare l'intera funzione *R(t)*; ad esempio, tra un componente che ha *MTTF* di 10 anni e uno che ha *MTTF* di 20 anni, è possibile dire subito che il secondo dura, in media, di più; se vogliamo però caratterizzare l'affidabilità per diversi intervalli di tempo, dobbiamo considerare i valori di

*R(t)* in tali intervalli. E' chiaro comunque che dispositivi "molto affidabili" avranno valori alti di *MTTF*.

Formalmente, considerati due sistemi, ciascuno individuato da una funzione affidabilità $R_i(t)$ e da un $MTTF_i$, si ha, intuitivamente:

$$R_2(t) > R_1(t) \ \ \forall t \Rightarrow MTTF_2 > MTTF_1$$

come si verifica, pensando al significato "grafico" dell'*MTTF*, nella situazione in figura:




Non risulta valida in genere valida la relazione inversa: cioè, se $MTTF_1 > MTTF_2$, non si ha $R_1(t) > R_2(t) \ \ \forall t$, ma ciò è in genere verificato solo in un intervallo $[t_1\ t_2]$.

## AFFIDABILITÀ CONDIZIONATA

Come già detto, la funzione R(t) si riferisce all'intervallo (0,t); in molti casi, però, ci si può porre il seguente problema: il dispositivo in esame ha già funzionato fino al tempo s, quale è la probabilità che funzioni per almeno un altro intervallo di tempo t? Ad esempio, abbiamo un sistema elettrico che funziona da un anno: quale è la probabilità che funzioni almeno un altro anno? Sarebbe sbagliato rispondere che tale affidabilità vale R(t), o R(t+s), o R(s)-R(t+s), perché così non si tiene conto del fatto che il componente ha già funzionato fino ad s. A tale scopo si definisce l'*affidabilità condizionata* di un componente di età s, ovvero la probabilità che esso abbia una durata di vita maggiore di s+t, supposto che abbia funzionato fino ad s:

$$R(t+s|s) = P\{T > t+s | T > s\}, \text{ con } t,s>0$$

Dato che {T > s+t}∩{T > s}={T > s+t}, ricordando la definizione di probabilità condizionata, si ha:

$$P\{(T > t+s) \mid (T > s)\} = \frac{P\{(T > t+s) \cap (T > s)\}}{P\{(T > s)\}} = \frac{P\{(T > t+s)\}}{P\{(T > s)\}}$$

e quindi:

$$R(t+s|s) = \frac{R(t+s)}{R(s)}$$

Si osservi che, naturalmente, R(t+0|0) = R(t). Si noti che, al variare di t, per ogni fissato s, R(t+s|s) gode delle proprietà di una funzione affidabilità rispetto a t. Invece, al variare dell'età s, fissato t, tale funzione può essere decrescente, ma anche costante o addirittura, in alcuni casi, crescente.

Analogamente, la probabilità condizionata di guasto di un componente di età t durante l'intervallo seguente di durata Δt è fornita dalla seguente relazione:

$$F(t+\Delta t|t) = \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{R(t)} = 1 - R(t+\Delta t|t)$$

## FUNZIONE TASSO DI GUASTO

Per un componente avente affidabilità R(t), si definisce funzione *tasso di guasto istantaneo*, *h(t)*, il seguente rapporto:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \tag{1}$$

Esso risulta anche uguale, ricordando la definizioni di *F(t)* e *R(t)*, il limite seguente:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{(t < T \le t+\Delta t) | (T > t)\}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{(t < T \le t+\Delta t)\}}{\Delta t \cdot P(T > t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t \cdot R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Dunque, guardando al secondo membro della relazione precedente, la funzione tasso di guasto ha il seguente significato fisico: *"h(t)dt rappresenta la probabilità che il componente si guasti in (t,t+dt), dato che ha funzionato fino a t"*. Esso ha le dimensioni dell'inverso di un tempo.

Si può anche dimostrare che il tasso di guasto può essere considerato, relativamente al caso della funzione di affidabilità esponenziale, pari al numero medio di guasti nell'unità di

tempo, nell'ipotesi che il dispositivo venga sostituito, appena guasto, da uno identico. Da tale proprietà esso prende il nome di "tasso (ovvero frequenza) di guasto" (in inglese: "*failure rate*", o "*hazard rate*"; da quest'ultima dizione viene il simbolo *h*)

È facile ricavare ora l'espressione di *R(t)* in funzione di *h(t)*, infatti:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)} = -\frac{d}{dt}\left(\ln\left(R(t)\right)\right) \tag{2}$$

da cui, integrando ambo i membri tra 0 e *t*, si ottiene:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t h(u)du\right) \tag{3}$$

È evidente che *R(t)* ed *h(t)* sono funzioni di *t*, ma, mentre la funzione affidabilità si riferisce a tutto ciò che è accaduto nell'intervallo [0, *t*], il tasso di guasto, come la densità, valuta solo le condizioni all'istante *t* (da cui l'aggettivo "istantaneo").

Sulla base delle relazioni precedenti (*h(t)* ↔ *R(t)*), è equivalente assegnare il tasso di guasto o la funzione affidabilità di un componente. Da ognuna di esse si può ricavare ogni altra grandezza probabilistica di interesse; ad esempio, noto *h(t)*, *R(t)* si ricava dalla (3):

$$f(t) = h(t)R(t) \tag{4}$$

Si noti che *h(t)* deve essere, in ogni istante, una quantità positiva, risultando pari al rapporto di quantità positive ed, inoltre, il diagramma di *h(t)* si troverà sempre al di sopra di quello di *f(t)*, in quanto *R(t)* è una quantità minore di uno. Si noti ancora che il tasso di guasto *h(t)* non è né una probabilità né una densità di probabilità. Infatti, esso (come la fdp) può essere maggiore di uno e, inoltre, risulta $\int_0^{+\infty} h(u)du = +\infty$, dovendo valere $R(+\infty) = \exp\left(-\int_0^{+\infty} h(u)du\right) = 0$. Dunque, una condizione necessaria perché una funzione *h(t)* possa rappresentare effettivamente un tasso di guasto è che essa non sia integrabile su tutto l'asse reale positivo; però deve essere integrabile su ogni intervallo di ampiezza finita (per la (3)).

# MODELLO DI AFFIDABILITA' ESPONENZIALE

La distribuzione esponenziale occupa un posto di primaria importanza nel campo dell'affidabilità; essa infatti esprime bene il comportamento dei componenti e quello dei sistemi nel loro periodo di vita utile, che è quello che più interessa; durante tale periodo, il tasso di guasto si può considerare pressoché costante, caratteristica unica del modello esponenziale (si noti comunque che, come vero per tutte le distribuzioni di probabilità, la distribuzione esponenziale rappresenta un modello "ideale" di un fenomeno reale).

La funzione densità di probabilità esponenziale è definita come:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \text{ con } t>0 \tag{1}$$

dove $\lambda$ è un parametro (costante) strettamente positivo.

La funzione affidabilità esponenziale è quindi espressa semplicemente da:

$$R(t) = 1 - F(t) = \exp(-\lambda t) \tag{2}$$

La funzione tasso di guasto *h(t)*, si ricava dalla seguente relazione:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda \cdot \exp(-\lambda t)}{\exp(-\lambda t)} = \lambda \tag{3}$$

Da quest'ultima relazione, e dalla (3) del paragrafo precedente, si evince che la funzione affidabilità esponenziale è la sola per la quale la funzione tasso di guasto risulta costante e pari al parametro $\lambda$, da cui, per esso, il nome di tasso di guasto.

Il valore atteso di una v.a. esponenziale con fdp (1), ovvero l'*MTTF* di un sistema il cui *TF* è descritto da tale v.a., vale (come già detto):

$$MTTF = \int_0^{+\infty} R(t)dt = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) = \frac{1}{\lambda} = m \tag{4}$$

Dunque, l'*MTTF* della funzione affidabilità esponenziale è il reciproco del tasso di guasto. Da ciò segue che $\lambda$ può essere considerato come il numero di guasti nell'unità di tempo per un dispositivo rinnovabile (ossia sostituibile immediatemente dopo ogni guasto).

Uno svantaggio della distribuzione esponenziale è costituito dalla coincidenza tra media e deviazione standard, la qual cosa comporta un "coefficiente di variazione", definito dal rapporto $\sigma/\mu$, del 100% e, quindi, un'elevata incertezza sui valori di T:

$\mu = \sigma \;\Rightarrow\; \nu = \sigma/\mu = 1 = 100\%$.

Più in generale, la distribuzione esponenziale, essendo caratterizzata da un unico parametro, è poco flessibile. Ad esempio, se sappiamo che il *TF* ha media $\mu$ = 10 anni e deviazione standard $\sigma$ = 1 anno, sappiamo già che esso non può essere descritto da una affidabilità di tipo esponenziale (mentre potrebbe andare bene una distribuzione gaussiana, che non presenta "vincoli" tra i valori dei due parametri).

**Proprietà di "assenza di memoria" della distribuzione Esponenziale**

La distribuzione esponenziale gode di una importante proprietà (che la caratterizza univocamente): l'ulteriore durata di funzionamento di un componente usato è indipendente dalla sua età. Questa condizione, equivalente al fatto che il tasso di guasto sia costante nel tempo, è detta proprietà di "assenza di memoria", ed è espressa matematicamente dalla seguente relazione:

$$R(t+s \mid s) = \frac{\exp(-\lambda(t+s))}{\exp(-\lambda s)} = \exp(-\lambda t) = R(t) \qquad (5)$$

Essa ha importanti conseguenze, sia pratiche che teoriche. Ad esempio, se il componente ha *MTTF* = 1 anno, la sua affidabilità dopo un anno di funzionamento vale 0.37. Se ha funzionato 10 anni (s =10 nella (5)), la probabilità che funzioni per almeno un altro anno (t = 1 nella 5)) è ancora 0.37! e lo stesso vale dopo s = 100 anni, s = 1000 anni, ecc. (il punto è che la (5) è indipendente dall'età trascorsa, s!).

Tale proprietà vale per tutti i fenomeni che seguono un modello esponenziale: in altri termini, per essi "il tempo già trascorso dall'inizio del fenomeno non dà alcuna informazione sulla ulteriore durata del fenomeno". Nel nostro caso, il fenomeno è il funzionamento di un componente, ma forse se si pensa a fenomeni tratti dalla vita quotidiana si apprezza di più la paradossalità della "assenza di memoria".

A dispetto della sua semplicità, per quanto si è detto, la distribuzione esponenziale non è adatta a descrivere il comportamento di componenti soggetti ad usura, ovvero è utilizzabile solo nel periodo di vita utile. Poiché spesso siamo interessati solo a tale periodo, è possibile utilizzare tale modello con buona approssimazione, se siamo in tale periodo (anche se, da un punto di vista *teorico*, il modello è definito su *tutto l'asse reale positivo,* bisognerà usare cautela nell'utilizzarlo per tempi molto grandi, rispetto all'MTTF del componente, per i quali sia ipotizzabile l'effetto dell'usura: ciò andrà visto sperimentalmente).

Dal punto di vista della manutenzione, assumendo di avere una distribuzione esponenziale del *TF*, segue che non c'è alcun vantaggio nel perseguire una politica di rimpiazzo pianificato dei componenti usati, sapendo che questi sono ancora funzionanti; in altri termini, non è conveniente effettuare una politica di "*manutenzione preventiva";* essa può essere invece conveniente, come intuitivo, se e quando il tasso di guasto è crescente nel tempo.

Il modello esponenziale si adatta molto bene ai tempi di funzionamento dei componenti elettronici, che risentono molto poco dell'usura (essendo spesso caratterizzati da *MTTF* dell'ordine delle centinaia di anni). Per essi, i tassi di guasto hanno valori tipici intorno a 1E-6 [ore-1], ovvero presentano in media "un guasto ogni milione di ore".

Nel campo elettrico, l'ipotesi esponenziale si adatta bene a caratterizzare i tempi di vita delle linee di trasmissione, i cui guasti sono prevalentemente accidentali (fulminazioni).

## Distribuzione Weibull

L'assunzione che il tasso di guasto sia costante è restrittiva e, talvolta, può risultare inaccettabile. In tali casi può risultare opportuna l'utilizzazione del modello *Weibull*, caratterizzato da una funzione tasso di guasto, la quale può risultare costante, crescente o decrescente a seconda che il parametro $\beta$ (detto parametro di forma) sia, rispettivamente, uguale, maggiore, o minore dell'unità.

La funzione densità di probabilità di tale modello è data da:

$$f(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}\exp\left(\lambda t^{\beta}\right); \qquad \beta, \lambda > 0$$

Di conseguenza, la funzione affidabilità di tipo Weibull risulta:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = \exp\left(-\lambda t^{\beta}\right).$$

È, altresì, facile ricavare, applicando la definizione, la seguente funzione tasso di guasto:

$$h(t) = -D\left[-\lambda t^{\beta}\right] = \lambda\beta t^{\beta-1}.$$

Se si riproduce l'andamento di *h(t)* al variare di $\beta$, si possono distinguere alcuni casi particolari:

a) $\beta=2 \quad \Rightarrow \quad h(t)=2\lambda t$ curva di Raylegh

b) $\beta=0.5 \quad \Rightarrow \quad h(t)=0.5\lambda t^{-0.5}$ curva di mortalità infantile.

c) $\beta=1 \quad \Rightarrow \quad h(t)=\lambda$ curva esponenziale.

## CONFRONTO TRA SISTEMI IN BASE AD *R(t), h(t), ED m*

Si possono evidenziare alcune relazioni che legano i parametri caratteristici di un sistema: R(t), h(t) e MTTF.

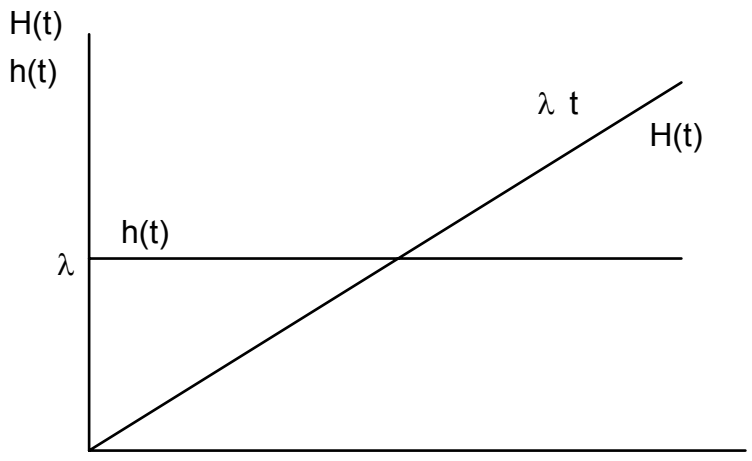
Indicando con $R_1$ ed $R_2$ le funzioni affidabilità di due sistemi, se il sistema 1 è più affidabile del 2, ovvero $R_1(t) > R_2(t)$ in ogni t, ciò non implica che valga $h_1(t) < h_2(t)$ $\forall t$, in quanto tale relazione sarebbe ricavata da una derivata, e nulla assicura che $f(t) > g(t) \Rightarrow f'(t) > g'(t)$. Il tasso di guasto fornisce un'idea della decrescenza della funzione R(t); infatti maggiore è il tasso di guasto, più veloce risulta la decrescenza di R(t).

Si può introdurre il *tasso di guasto cumulativo,* che si indica con H(t) e rappresenta una funzione integrale:

$$H(t)=\int_0^t h(t)dt=-\ln[R(t)]$$

Si vede che H(t) è una funzione sempre positiva, e crescente nel tempo.

Se la funzione è esponenziale risulta $h(t)=\lambda$ ed $H(t)=\lambda t$ (v. figura):




Si può ora dimostrare che:

$h_1(t) > h_2(t) \ \forall t \Rightarrow R_1(t) < R_2(t) \ \forall t$

mentre non vale il viceversa. Infatti si ha:

$$\frac{R_1(t)}{R_2(t)} = \frac{\exp\left(-\int_0^t h_1(t)dt\right)}{\exp\left(-\int_0^t h_2(t)dt\right)} = \frac{\exp(-H_1(t))}{\exp(-H_2(t))} = \exp(H_2(t) - H_1(t)) < 1$$

essendo $h_2(t)<h_1(t)$ $\forall t$, e dunque $H_2(t) < H_1(t)$; quindi, come volevasi dimostrare, $R_1(t)< R_2(t)$.

In definitiva, si è visto che, dati due sistemi, se $MTTF_1 > MTTF_2$ non si può dire che sia $R_1(t) > R_2(t)$ , ma, certamente, risulta valida la seguente catena di implicazioni

$h_1(t) > h_2(t) \ \forall t \Rightarrow R_1(t) < R_2(t) \ \forall t \Rightarrow MTTF_1 < MTTF_2$ ,

dalla quale si deduce che, nota una disuguaglianza relativa al tasso di guasto, da essa si possono desumere tutte le altre.

Analogamente, si può dimostrare, per un intervallo di tempo finito (o,s), che:

$h_1(t) > h_2(t) \ \forall t \in (0,s) \Rightarrow R_1(t) < R_2(t) \ \forall t \in (0,s)$.

# DISPONIBILITÀ

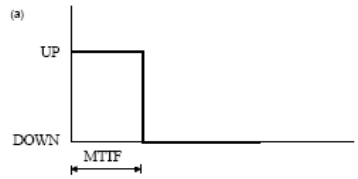
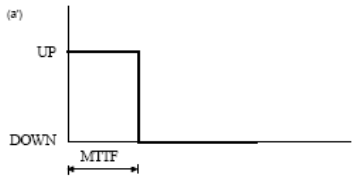
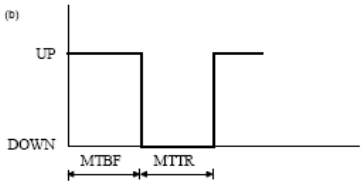
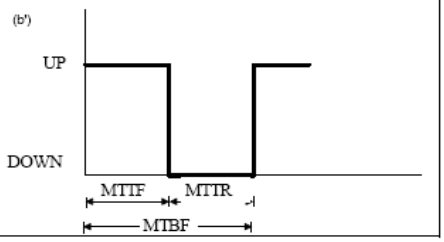
Come già accennato nel paragrafo che riguarda gli scopi della teoria dell'affidabilità, per i sistemi/componenti riparabili si definisce una funzione detta disponibilità, A(t). È evidente che nel caso in cui sia prevista manutenzione o sostituzione di componenti (per i sistemi), tale operazione deve essere eseguita in intervalli di tempo regolari e non coincidenti con i tempi di missione. Naturalmente, gli interventi che è necessario effettuare richiedono del tempo e rendono, perciò, i sistemi non disponibili in questo lasso di tempo.

La funzione che tiene conto sia dell'affidabilità del sistema sia degli aspetti manutentivi e quindi del tempo necessario per questi interventi è la Disponibilità (A). La disponibilità è perciò un caso più generale dei problemi che riguardano l'affidabilità; infatti, mentre per i sistemi di cui si calcola la disponibilità si presuppone un ritorno allo stato di funzionamento, per i sistemi di cui si calcola l'affidabilità il guasto rimane permanente.

# MTBF (MEAN TIME BETWEEN FAILURE)

Il tempo medio tra i guasti può essere calcolato in due modi:

1. il MTBF è il MTTF per componenti riparabili;
2. il MTBF è la somma del tempo medio fino al guasto del componente e del suo tempo medio di riparazione MTTR.

| Componente | Terminologia I | Terminologia II (di seguito utilizzata) |
|---|---|---|
| Non riparabile |   |   |
| Riparabile |   |   |

Per ciò che è stato detto e proposito dell'affidabilità è più logico utilizzare il secondo metodo perché così facendo si mantiene la stessa terminologia per il MTTF indipendentemente dal fatto che il componente sia riparabile o non riparabile, considerando l'uno come estensione teorica dell'altro.

## SISTEMI COMPOSTI

In questo paragrafo si affronta lo studio dell'affidabilità sistemi formati da due o più componenti, fisicamente o logicamente connessi.

Spesso è difficile calcolare, o stimare, direttamente l'affidabilità del sistema, specie se questo è abbastanza complesso, mentre tale calcolo si semplifica se si suddivide il sistema nei suoi componenti (ovvero in opportuni "sottosistemi") dei quali è più semplice conoscere il valore dell'affidabilità, oppure più agevole il calcolo.

Lo scopo del Calcolo (o Analisi) dell'affidabilità di un sistema è appunto quello di individuare procedimenti che, a partire dall'affidabilità dei singoli componenti e da come tali componenti sono interconnessi, permettano di ricavare l'affidabilità del sistema da essi costituito.

Si suppone, dunque, di conoscere:

1. la struttura del sistema, ed in particolare lo stato di funzionamento del sistema in corrispondenza di ogni stato di funzionamento dei singoli componenti;
2. l'affidabilità di ogni singolo componente (o più in generale, l'affidabilità "congiunta" dei componenti, nel caso in cui questi non siano statisticamente indipendenti).

È utile sottolineare che si intende per "componente" una qualsiasi parte del sistema di cui si conosca l'affidabilità, e che l'affidabilità di un componente non sempre è un dato di semplice calcolo; in genere, esso viene ricavato da estrapolazioni statistiche di dati dal campo, da prove di laboratorio effettuate su di un lotto di componenti supposti identici o viene fornito dal costruttore insieme alle specifiche di funzionamento.

In questo paragrafo si esamina in particolare l'analisi dell'affidabilità in dipendenza dal tempo. Nel seguito si considererà un sistema costituito, nel caso generale, da n componenti; il sistema viene indicato con la lettera S; si definiscono inoltre, con lettera maiuscola, gli eventi aleatori:

$C_j$=*{il componente $c_j$ funziona};*

$\overline{C}_j$ =*{il componente $c_j$ non funziona}*

*S={il sistema funziona};*

$\overline{S}$ =*{il sistema non funziona}*

Per quanto detto in precedenza, l'analisi di affidabilità del sistema consiste nell'esprimere R in funzione delle affidabilità $r_j$ dei componenti, e anche delle affidabilità congiunte nel caso di componenti non indipendenti.

I componenti ($c_1$,...,$c_n$) sono definiti "statisticamente indipendenti" se i rispettivi eventi di buon funzionamento ($C_1$,...,$C_n$), sono statisticamente indipendenti, cioè se *la probabilità* di buon funzionamento di a non dipende (matematicamente) dallo stato di b (e viceversa: le due cose sono equivalenti), che è appunto la "traduzione concettuale" della relazione P(A|B)= P(A). In altri termini, il fatto che b funzioni non altera le nostre informazioni circa *la probabilità* di buon funzionamento di a. È chiaro che però, da un punto di vista *pratico*, spesso, in mancanza di informazioni sul funzionamento *congiunto* dei due componenti, l'indipendenza viene assunta come *ipotesi.*

Se i componenti sono indipendenti, l'affidabilità del sistema si può esprimere in funzione delle affidabilità dei singoli componenti:

$R= \Phi(r_1, r_2, ..., r_n)$

La funzione $\Phi$ è detta *funzione di affidabilità strutturale:* essa assume, naturalmente, valori in (0,1), e gode delle seguenti, intuitive, proprietà:

1. $\Phi(0,0,...., 0) = 0$;
2. $\Phi(1,1,...., 1) = 1$;
3. $\dfrac{\partial \Phi}{\partial r_k} > 0 \quad \forall k$ .

La proprietà 1 afferma che, se i componenti sono tutti guasti allora anche il sistema è guasto, naturalmente. La proprietà 2 afferma che, se i componenti sono tutti funzionanti,

allora anche il sistema è funzionante. La proprietà 3 afferma che, aumentando l'affidabilità di un qualsiasi componente, anche l'affidabilità del sistema aumenta.

Tali proprietà appaiono abbastanza ovvie, però vi possono essere alcuni sistemi particolari, che non considereremo, che non le rispettano. I sistemi per i quali tali proprietà sono valide sono detti "*coerenti*".

È chiaro come l'analisi di affidabilità di un sistema qui descritta sia di grande importanza sia in fase di *previsione* che di *progetto*:

- in fase di *previsione*, essa consente di valutare l'affidabilità del sistema in funzione dell'affidabilità dei componenti, senza effettuare delle prove statistiche direttamente sul sistema, cosa che sarebbe spesso troppo costosa in termini economici e/o di tempo, o addirittura rischiosa (si pensi alla valutazione di affidabilità di una centrale nucleare); soprattutto, essa consente di calcolare l'affidabilità del sistema *prima* che esso sia messo in opera, in modo da poter valutare tempestivamente eventuali modifiche in sede di progetto (vedi punto successivo) nel caso in cui tale affidabilità risulti insufficiente;
- in fase di *progetto*, la conoscenza del legame analitico tra affidabilità del sistema e affidabilità dei componenti consente di scegliere razionalmente la configurazione ottimale del sistema tra le possibili alternative disponibili; ad esempio, attraverso la funzione di affidabilità strutturale si può determinare quale sia il miglioramento di affidabilità del sistema ottenibile da un miglioramento di affidabilità di ogni singolo componente, e dunque quale componente convenga migliorare al fine di ottenere il massimo aumento di affidabilità; ovvero decidere se e quanti componenti inserire "in parallelo" a quelli dati al fine di ottenere un dato valore di affidabilità (determinato in sede di specifiche, a volte su base contrattuale o normativa).

Quest'ultimo punto illustra come l'*analisi* di affidabilità sia strettamente collegata alla *sintesi* di affidabilità, ovvero alla scelta del valore ottimale di affidabilità da realizzare per il sistema in funzione di vincoli di natura tecnica (determinati dalle specifiche tecniche cui il sistema deve soddisfare), economica (determinati dai costi di eventuali guasti), ambientale (determinati dai danni ambientali conseguenti ai guasti, o derivanti dall'utilizzo di particolari componenti), ecc…

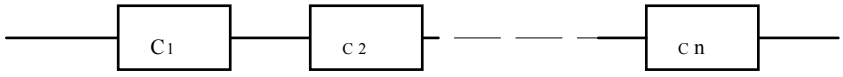
Nel caso in cui si voglia valutare l'evoluzione temporale dell'affidabilità del sistema, è necessario conoscere le funzioni affidabilità, $R_j(t)$, dei singoli componenti in funzione del

tempo: ciò è argomento della *analisi dinamica* dell'affidabilità dei sistemi. Essa rappresenta una estensione relativamente semplice delle tecniche che qui si esaminano.

## *Sistemi in serie*

Si consideri un sistema costituito da n componenti; i componenti si dicono, dal punto di vista dell'affidabilità del sistema, "collegati in serie" se il sistema funziona se e solo se funzionano tutti i suoi componenti. Ad esempio, un sistema di produzione dell'energia elettrica costituito da una turbina e un alternatore funziona solo se entrambi i componenti sono funzionanti.

La rappresentazione grafica di un sistema serie è quella in figura, ottenuta collegando "in serie" i blocchi, corrispondenti ai singoli componenti: il collegamento ingresso-uscita del sistema a blocchi è, infatti, assicurato solo se tutti i blocchi del sistema funzionano; si pensi ad un segnale elettrico che, partendo dal nodo iniziale di sinistra, debba raggiungere quello terminale a destra: il generico componente è funzionante se il blocco relativo lascia passare il segnale.




Dualmente, il sistema si guasta non appena si guasta un componente: graficamente, quando il blocco corrispondente a tale componente viene "aperto", non vi è più collegamento tra ingresso e uscita. *Si sottolinea che la rappresentazione affidabilistica non dipende dall'affidabilità dei componenti! (cioè: dipende da come sono connessi fisicamente i componenti e dalla missione del sistema, qualunque sia l'affidabilità dei componenti).*

Si effettua, ora, l'analisi del sistema in serie.

Dalle proprietà elementari del calcolo delle probabilità si ricava che:

$$\begin{cases} R \le \min(r_j;\ j = 1,\dots,n) \\ R \ge 1 - \sum_{j=1}^{n} f_j \end{cases}$$

dove, si ricorda, $r_j = P(C_j)$ e $f_j = 1 - r_j = P(\overline{C}_j)$. Le disuguaglianze di cui sopra sono sempre valide, e sono in particolare utili quando gli eventi non sono indipendenti (o non si hanno informazioni sulla loro dipendenza).

Se i componenti del sistema sono indipendenti si ha:

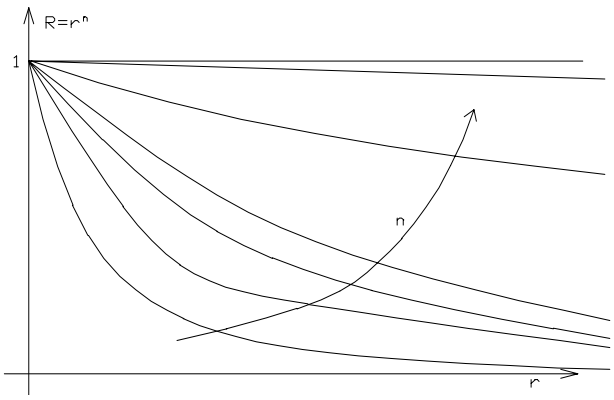
$$R_S = \prod_{j=1}^{n} r_j \quad e \quad F_S = 1 - R_S \cong \sum_{j=1}^{n} f_j$$

Quest'ultima relazione approssimata vale se le $f_j$ sono abbastanza piccole, ossia se i componenti sono di elevata affidabilità; essa è detta "approssimazione degli eventi rari" (ed indipendenti). Essa si ricava dalla formula generale della probabilità dell'unione di più eventi. La funzione $\Phi$ gode delle proprietà dei sistemi coerenti.

Se i componenti hanno tutti la stessa affidabilità $[P(C_j) = r, \forall\, j = 1, ..., n]$, si ottiene:

$R = r^n$

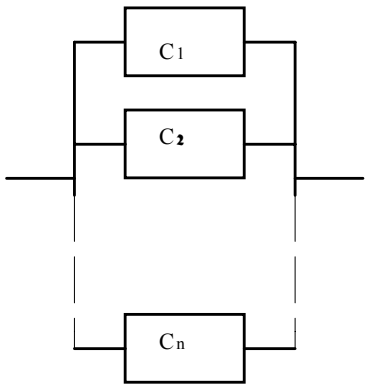
Tale relazione mostra come R diminuisca molto rapidamente al crescere del numero n di componenti. Ciò è illustrato dal diagramma al lato, in cui R è riportata in funzione di n al variare di r. Gli andamenti sono simili a quelli di un esponenziale decrescente, come si può dedurre dalla relazione: $R = r^n = \exp[-n \cdot |\log(r)|]$. Naturalmente, R aumenta con r.




Si osservi che $r^n = (1-f)^n \cong 1 - nf$ ( se f è sufficientemente piccolo). Ecco perché, per r prossimo ad 1, le curve sono approssimativamente delle rette decrescenti in n.

## *Sistemi in parallelo*

Un sistema si dice *in parallelo* quando funziona se almeno uno dei suoi componenti funziona; la rappresentazione a blocchi del sistema parallelo è come nella fig. seguente: i diversi componenti sono rappresentati da rami collegati fisicamente in parallelo.




Dualmente, il sistema si guasta se - e solo se! - si guastano tutti i componenti.

Dal punto di vista della analogia con la trasmissione di un segnale elettrico, perché sia assicurato il collegamento ingresso-uscita è sufficiente che almeno un ramo sia funzionante.

Il sistema parallelo è un esempio di sistema "ridondante", in quanto, se tutti i componenti funzionano, ve ne sono n-1 che sono effettivamente ridondanti, cioè non necessari ai fini del funzionamento del sistema. Naturalmente, la configurazione parallelo viene progettata per aumentare l'affidabilità del sistema, considerando la possibilità, sempre presente, di guasti dei componenti. Teoricamente, aumentando indefinitamente il numero di componenti in parallelo, si può giungere ad un sistema di affidabilità arbitrariamente prossima ad 1: ciò naturalmente comporterà dei costi elevati; questo ragionamento esemplifica come la configurazione ottimale di un sistema dovrà essere necessariamente ottenuta da un compromesso tra elevata affidabilità e costi contenuti (due esigenze in contrasto tra di loro).

Naturalmente, è ovvio notare - come accennato in precedenza - che un sistema parallelo funziona se funzionano tutti i suoi componenti: solo che questa condizione, a differenza che nel caso serie, non è necessaria al funzionamento del sistema, ma solo sufficiente (come del resto accade per tutti i sistemi); nel caso serie, come già detto, è invece necessaria e sufficiente.

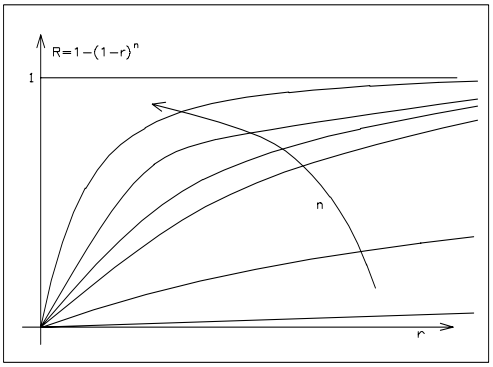
Se i componenti del sistema sono indipendenti, è conveniente calcolare l'affidabilità del sistema in funzione dell'inaffidabilità dei singoli componenti:

$$F_S = \prod_{j=1}^{n} f_j \quad e \quad R_S = 1 - F_S$$

Se i componenti hanno tutti la stessa affidabilità [$P(C_j) = r \ \forall \ j = 1, ..., n$] , si ottiene:

$$R_S = 1 - (1 - r)^n$$

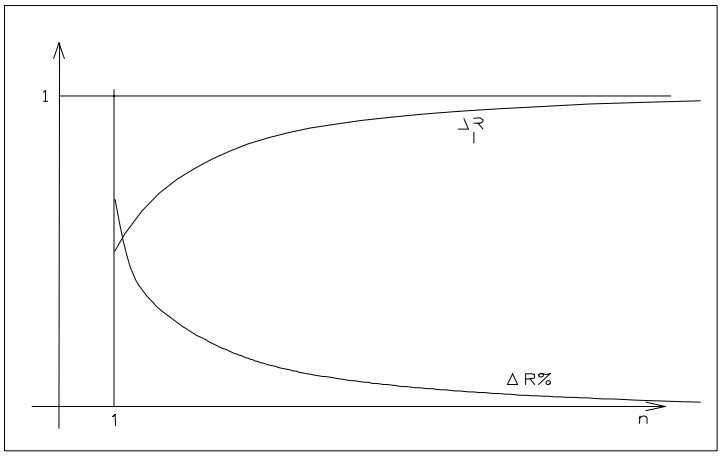
Dall'ultima relazione si vede, come intuitivo, che R aumenta molto rapidamente con n, tendendo asintoticamente ad 1 al divergere di n. Diagrammando tale relazione in funzione di n, otteniamo il grafico in figura:




Anche per il sistema parallelo possiamo introdurre la funzione di affidabilità:

$\Phi(r_1, r_2, ..., r_n) = 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - r_j)$, che gode delle solite proprietà di coerenza.

Si consideri un sistema costituito da (n-1) componenti uguali in parallelo, indipendenti, di affidabilità r; aggiungendo un altro componente in parallelo ai primi, l'affidabilità del sistema cresce. Si può facilmente verificare che l'incremento di affidabilità $\Delta R(n) = R(n) - R(n-1)$ è pari a $\Delta R(n) = r(1-r)^{n-1}$, quantità positiva. Tale funzione è però decrescente in n, e tanto più rapidamente quanto più r è prossimo ad 1; in particolare anche l'incremento percentuale di affidabilità $\Delta R\% = \frac{\Delta R(n)}{R(n-1)} \cdot 100$, decresce fortemente al crescere di n, come mostrato in figura.




Ciò può essere visualizzato anche sulle curve della affidabilità in funzione di n R(n) (v. curva superiore in figura), che sono di tipo "concavo".

Praticamente, aggiungendo componenti in parallelo ad un sistema, si riesce ad aumentare l'affidabilità di un quantità sempre più piccola fino ad un valore praticamente non apprezzabile in termini percentuali. È chiaro che esisterà un numero ottimale di componenti

da mettere in parallelo, ricavabile da un compromesso tra l'affidabilità di un sistema (quindi indirettamente tra i costi del guasto), e i costi derivati dall'installazione dei componenti che crescono linearmente con n. Naturalmente, l'inserzione di componenti in parallelo è il metodo più semplice per aumentare l'affidabilità del sistema, ed è quindi utilizzato in fase di progetto.

# Bibliografia


- Appunti e dispense del corso

- "Principi fondamentali della teoria dell'affidabilità" di Lucio Compagno e Natalia Trapani

- Consultazione di siti Internet

- Tesi: "L'implementazione dell'approccio per processi ai fini della certificazione di qualità: il caso COSAPPO S.r.l." di Raffaele Mario Ciancia e relatore il Prof. Ing. Giovanni Perrone